

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.
A.O. 4494

THÈSE

présentée

À LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

YVETTE KOSMANN

Sujet de la Thèse: Dérivées de Lie des spineurs

Soutenue le 29 Mai 1970, devant la Commission d'examen

MM. LICHNEROWICZ Président

DIXMIER

ZISMAN

M.elle LIBERMANN

} Examineurs

Dérivées de Lie des spineurs.

YVETTE KOSMANN (Paris (*)) (**)

Résumé. — On étudie le problème de la transformation d'un champ de spineurs sur une variété spinorielle par un groupe à un paramètre de difféomorphismes de la variété, en généralisant aux champs de spineurs la notion de dérivation de Lie. On peut alors étudier l'invariance d'un système d'équations aux dérivées partielles sur les spineurs (équations de Dirac) avec des méthodes analogues à celles qui sont valables dans le cas des tenseurs (équations de Maxwell).

Summary. — The notion of a Lie derivative is generalized to spinor fields on a Spin manifold and the problem of transforming a spinor field under a one-parameter group of diffeomorphisms of the manifold is studied. The invariance of a differential system acting on spinors (Dirac's equations) is studied using methods similar to those used in the case of tensors (Maxwell's equations).

Introduction.

C'est à partir des travaux des physiciens sur les particules élémentaires (DIRAC [15], EINSTEIN, TETRODE, WEYL, FOCK *et al.*) que les spineurs, déjà découverts par E. CARTAN en 1913 dans ses recherches sur les représentations linéaires des groupes simples, furent étudiés par VAN DER WAERDEN, BRAUER et WEYL, VEBLEN et E. CARTAN lui-même [5]. Une théorie algébrique détaillée fut faite plus tard par C. CHEVALLEY [9], et d'autres travaux sur les algèbres de CLIFFORD et sur le groupe spinoriel furent publiés (en particulier par J. DIEUDONNÉ [14]). Les spineurs sur un espace-temps courbe avaient été utilisés dès 1928-1929 par les physiciens cités plus haut. En 1953, paraissait un article de M. RIESZ sur l'équation de DIRAC en relativité générale. Mais la notion de variété spinorielle ne fut introduite que plus récemment (A. HAEFLIGER [18], J. MILNOR [33], A. LICHNEROWICZ [31] et [30]). Enfin, des développements nouveaux sont apparus avec l'utilisation du fibré des algèbres de CLIFFORD d'une variété riemannienne ou pseudo-riemannienne en K -théorie.

Les résultats concernant les algèbres de CLIFFORD, la notion de spineur d'un espace vectoriel euclidien ou pseudo-euclidien, le groupe spinoriel, puis les variétés spinorielles sont rappelés au chapitre I (mais les conditions d'existence des structures spinorielles ne sont pas étudiées ici).

Dans ce qui suit, on a cherché à résoudre le problème de la transformation d'un champ de spineurs sur une variété spinorielle par un groupe à un paramètre de trans-

(*) Actuellement: Université des Sciences et Techniques de Lille.

(**) Entrata in Redazione il 19 aprile 1971.

formations de la variété, en généralisant aux champs de spineurs la notion de dérivation de LIE. On sait qu'une isométrie infinitésimale agit sur les repères orthonormés, donc aussi sur les repères spinoriels (car le fibré des repères spinoriels est revêtement d'ordre 2 du fibré des repères orthonormés directs); d'où la définition géométrique de l'action d'une isométrie infinitésimale sur un champ de spineurs. L'objet du chapitre II est d'étendre cette définition au cas des transformations infinitésimales quelconques (et en particulier conformes); on introduit pour ce faire la notion de section locale semi-invariante. On en déduit ensuite l'existence, localement le long des trajectoires du champ de vecteurs X envisagé, d'isomorphismes $\exp(tX)^*$ qui généralisent aux spineurs les applications $\exp(tX)^*$ sur les vecteurs (applications linéaires tangentes des transformations locales $\exp(-tX)$).

Le chapitre III comprend l'extension de la dérivation de LIE aux tenseurs-spineurs de type quelconque, l'étude générale des dérivations de l'algèbre des tenseurs-spineurs conservant les types et commutant avec les contractions, la commutation de ces dérivations avec les opérateurs classiques sur les spineurs (conjugaison, adjonction, « métrique spinorielle », passage aux semi-spineurs), l'étude de la dérivation de LIE par le crochet de deux champs de vecteurs, et la définition et les propriétés de la dérivée de LIE d'une connexion spinorielle.

Le chapitre IV est consacré à l'invariance des opérateurs différentiels. Pour un opérateur différentiel ou un système d'équations aux dérivées partielles sur les tenseurs, on peut donner une condition nécessaire et suffisante d'invariance par un groupe de transformations à l'aide de la dérivation de LIE par les générateurs infinitésimaux du groupe; par analogie, on définit ainsi l'invariance pour les opérateurs différentiels et les systèmes d'équations aux dérivées partielles sur les spineurs. Remarquons que dans le cas des systèmes d'équations aux dérivées partielles, on utilise pour cette généralisation la notion d'invariance forte; le lien avec la notion d'invariance n'est pas étudié ici.

Au chapitre V, on étudie les spineurs harmoniques sur une variété spinorielle, riemannienne et compacte. Puis, utilisant les définitions du chapitre IV, on étudie l'invariance des équations de DIRAC, en particulier par les transformations conformes. La même méthode est utilisée pour les équations de MAXWELL sur une variété riemannienne ou pseudo-riemannienne de dimension paire. On met en évidence le lien entre tous les résultats obtenus (loi de transformation du vecteur courant).

De nombreuses questions restent à résoudre: généralisations diverses, problèmes de topologie des variétés à structure spinorielle, invariance des systèmes d'équations aux dérivées partielles, applications à la mécanique quantique relativiste. Dans ces différentes directions, des problèmes de difficulté et d'importance inégales restent ouverts.

Je dédie cette thèse à mes Parents.

Le sujet de cette thèse m'a été proposé par Monsieur A. LICHNEROWICZ. C'est sous sa direction et grâce à ses conseils et encouragements que j'ai travaillé. Je le prie d'accepter toute ma reconnaissance.

A Monsieur J. DIXMIER qui a lu le manuscrit et à Mademoiselle P. LIBERMANN



qui a bien voulu faire partie du Jury de cette thèse, j'adresse mes remerciements sincères. Et je remercie vivement Monsieur M. ZISMAN qui m'a proposé un sujet de seconde thèse.

Cette thèse, enfin, doit beaucoup à l'aide que m'a apportée ma sœur Claude pour la rédaction et la révision.

CHAPITRE I

VARIÉTÉS SPINORIELLES

1. — Représentations spinorielles.

Pour une étude détaillée des algèbres de CLIFFORD et des groupes spinoriels, on pourra consulter N. BOURBAKI [3], C. CHEVALLEY [9] et A. LICHNEROWICZ [28], [29] et [30].

1.1. Notations. — Soit T un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, de dimension finie n . On désigne par ν la partie entière de $n/2$. Soit g une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur T , de signature k (nombre de carrés positifs). On note encore g la forme quadratique associée. $O(T, g)$ désigne le groupe orthogonal, $SO_0(T, g)$ la composante connexe de l'identité dans $O(T, g)$. Si $T = \mathbf{R}^n$ et si g est la forme quadratique canonique de signature k , on pose $O(T, g) = O(n, k)$ et $SO_0(T, g) = SO_0(n, k)$.

Les indices grecs prendront les valeurs 1 à n , les indices latins les valeurs 1 à 2^ν .

Soit C l'algèbre de CLIFFORD de (T, g) et j l'injection canonique de T dans C . Par définition du produit dans l'algèbre de CLIFFORD, on a

$$(1) \quad \forall X \in T, \quad \forall Y \in T, \quad j(X)j(Y) + j(Y)j(X) = -2g(X, Y)I$$

(I désignant l'élément unité de C).

On notera C^+ la sous-algèbre des éléments pairs de C (algèbre de CLIFFORD réduite) et C^- le sous-espace vectoriel des éléments impairs de C .

1.2. Complexification. — Si T est un espace vectoriel réel, on désigne par $(\mathcal{T}, g)$ l'espace vectoriel complexifié de T , muni de la forme quadratique déduite de g . L'algèbre de CLIFFORD de $(\mathcal{T}, g)$ notée $\mathcal{C}$, est la complexifiée de C . On notera $\mathcal{C}^+$ la sous-algèbre des éléments pairs de $\mathcal{C}$ (algèbre de CLIFFORD complexifiée réduite).

1.3. Représentations de l'algèbre de Clifford. — Si n est pair, $\mathcal{C}$ a une seule classe de représentations irréductibles, de dimension 2^ν , et il existe un idéal à gauche minimal S de $\mathcal{C}$ (qui est dit espace de spineurs) et un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{C}$

sur l'algèbre des endomorphismes de S , donc sur $S \otimes S^*$ (qui est dit représentation spinorielle).

Si n est impair, C^+ a une seule classe de représentations irréductibles, de dimension 2^n , et il existe un idéal à gauche minimal S de C^+ (espace de spineurs) et un homomorphisme d'algèbres de C sur $S \otimes S^*$ dont la restriction à C^+ est bijective (représentation spinorielle).

On désigne par $\gamma(X)$ l'image d'un élément X de T dans $S \otimes S^*$ par la représentation spinorielle.

(e_α) étant une base de T , on pose $\gamma(e_\alpha) = \gamma_\alpha$. On pose d'autre part $g(e_\alpha, e_\beta) = g_{\alpha\beta}$ et ($g^{\alpha\beta}$) désigne la matrice inverse de la matrice ($g_{\alpha\beta}$). On pose $\gamma^\alpha = g^{\alpha\beta} \gamma_\beta$. On a, d'après (1),

$$(2) \quad \gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = -2g_{\alpha\beta} I.$$

Si l'on choisit d'autre part dans T une base orthonormée, les éléments $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ définissent n matrices complexes d'ordre 2^n qui sont dites matrices de DIRAC.

1.4. *Groupe spinoriel.* — Le groupe de CLIFFORD G de (T, g) est le groupe des éléments inversibles A de C tels que $Aj(T)\bar{A}^1 \subset j(T)$. Le groupe des éléments de $G \cap C^+$ de norme spinorielle 1 est appelé groupe spinoriel de (T, g) et noté $\text{Spin}(T, g)$.

χ désigne l'homomorphisme de G dans $O(T, g)$ défini par

$$(3) \quad \forall A \in G, \quad \forall X \in T, \quad \chi(A)X = Aj(X)\bar{A}^1.$$

L'image de $\text{Spin}(T, g)$ par χ est $SO_0(T, g)$. Dans toute la suite, on supposera que $n \geq 3$ ou que $n = 2$ et g est définie positive; la restriction de χ à $\text{Spin}(T, g)$ est alors une application de revêtement d'ordre 2 (revêtement universel de $SO_0(T, g)$ si $n \geq 3$ et g est définie positive).

$\text{Spin}(n, k)$ désigne le groupe spinoriel de R^n muni de la forme quadratique canonique de signature k .

1.5. *Remarque.* — En relativité générale, on appelle groupe spinoriel (contrairement à la définition donnée ci-dessus) le sous-groupe des éléments de G de déterminant 1 dans la représentation de G par des matrices complexes d'ordre 2^n , revêtement d'ordre 2 du groupe de LORENTZ complet. Le groupe considéré ci-dessus en est la composante connexe de l'identité.

1.6. *Algèbre de Lie du groupe spinoriel.* — L'homomorphisme χ induit un isomorphisme χ' de l'algèbre de LIE $\underline{\text{Spin}}(T, g)$ du groupe spinoriel sur l'algèbre de LIE $\underline{SO}(T, g)$ du groupe orthogonal.

$T, \text{Spin}(T, g), \underline{\text{Spin}}(T, g)$ peuvent être identifiés à des sous-ensembles de C^+ , donc de $S \otimes S^*$.

Un élément A de $\underline{SO}(T, g)$ est représenté dans une base (e_α) orthonormée par une matrice (A^α_β). On a

$$(4) \quad (\chi')^{-1}(A) = -\frac{1}{4} A^\alpha_\beta \gamma_\alpha \gamma^\beta.$$

2. – Variétés spinorielles.

Pour la définition et les propriétés des variétés spinorielles, voir J. MILNOR [33] et A. LICHTNEROWICZ [28], [29] et [30].

Remarquons que tout ce qui suit peut s'écrire pour des variétés de classe C^p , $p \geq 2$.

2.1. Fibré des repères spinoriels. – Soit V une variété de classe C^∞ , paracompacte, connexe, de dimension n , et soit $E(V)$ le fibré principal des repères linéaires de V , de groupe structural le groupe linéaire réel à n dimensions $GL(n)$.

On suppose V munie d'une structure riemannienne ou pseudo-riemannienne définie par une métrique g , de signature k . Soit $\mathcal{O}(V)$ le fibré principal des repères orthonormés de V , de groupe structural $O(n, k)$.

On suppose V complètement orientée, c'est-à-dire munie d'un fibré principal $\mathcal{E}(V)$ (fibré des repères orthonormés directs), de groupe structural $SO_0(n, k)$, obtenu à partir de $\mathcal{O}(V)$ par réduction du groupe structural. Dans le cas d'une variété riemannienne, la complète orientabilité est équivalente à l'orientabilité.

Une telle variété V est dite variété spinorielle si elle est munie d'un fibré principal $S(V)$ (fibré des repères spinoriels), de groupe structural $\text{Spin}(n, k)$, et d'un morphisme de fibrés principaux $\tilde{\chi}$ de $S(V)$ sur $\mathcal{E}(V)$ induisant l'identité sur V et compatible avec l'homomorphisme de groupes $\chi: \text{Spin}(n, k) \rightarrow SO_0(n, k)$. Alors $\tilde{\chi}: S(V) \rightarrow \mathcal{E}(V)$ est un revêtement d'ordre 2.

2.2. Fibrés associés. – Le fibré des $(1, 0)$ spineurs (ou spineurs) de la variété spinorielle V est le fibré vectoriel complexe $S(V)$ associé au fibré principal $S(V)$, de fibre $\mathbb{C}^{2^n}$ ($\text{Spin}(n, k)$ agissant sur $\mathbb{C}^{2^n}$ considéré comme espace de spineurs de $\mathbb{R}^n$ muni de la forme quadratique canonique de signature k).

Le fibré dual du fibré vectoriel complexe $S(V)$ est appelé fibré des $(0, 1)$ spineurs (ou spineurs covariants) et noté $S^*(V)$.

Par produits tensoriels du fibré tangent complexifié $\mathcal{T}(V)$, de son dual $\mathcal{T}^*(V)$, du fibré vectoriel $S(V)$ et de son dual $S^*(V)$, on obtient les fibrés des (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs (p, q, r, s , entiers positifs ou nuls).

Il existe un morphisme canonique du fibré $\mathcal{C}(V)$ des algèbres de CLIFFORD complexifiées de V sur le fibré des $(1, 1)$ spineurs $S(V) \otimes S^*(V)$. Si n est pair, c'est un isomorphisme. Si n est impair, sa restriction au fibré des algèbres de CLIFFORD complexifiées réduites est un isomorphisme.

On désigne par T_x , $\mathcal{T}_x$, S_x et $\mathcal{C}_x$ les fibres au point x de V du fibré tangent $T(V)$, du fibré tangent complexifié $\mathcal{T}(V)$, du fibré $S(V)$ et du fibré $\mathcal{C}(V)$.

2.3. Champs de tenseurs-spineurs. – On note $\mathcal{F}(V)$ l'anneau des fonctions de classe C^∞ sur V à valeurs dans $\mathbb{C}$. L'ensemble $\underline{\mathcal{T}}_{rs}^p(V)$ des champs de (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et un module sur $\mathcal{F}(V)$. On note en particulier $\underline{S}(V)$ et $\underline{S}^*(V)$ les modules des champs de $(1, 0)$ spineurs et de $(0, 1)$ spineurs.

L'algèbre des champs de tenseurs-spineurs $\mathfrak{A}(V)$ est la somme directe des modules $\mathcal{T}_s^r(V)$ pour $(p, q, r, s) \in \mathbb{N}^4$; c'est une algèbre graduée par $\mathbb{N}^4$ sur $\mathbf{C}$ et aussi sur l'anneau $\mathcal{F}(V)$. On dira le plus souvent « tenseur-spineur » pour « champ de tenseurs-spineurs ».

Le $(0, 1)$ tenseur- $(1, 1)$ spineur fondamental γ est obtenu en considérant la section du fibré $\mathcal{T}^*(V) \otimes \mathbf{C}(V)$ définie en chaque point par l'injection canonique j_x de $\mathcal{T}_x$ dans $\mathbf{C}_x$, puis en composant avec le morphisme du fibré $\mathbf{C}(V)$ sur le fibré $S(V) \otimes S^*(V)$. Les composantes (γ_α) de γ dans un champ de repères linéaires vérifient

$$(5) \quad \gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = -2g_{\alpha\beta} I.$$

Le $(1, 0)$ tenseur- $(1, 1)$ spineur associé à γ est encore noté γ .

Pour tout $(0, 2)$ tenseur symétrique t , on a

$$(6) \quad t_{\lambda\mu} \gamma^\lambda \gamma^\mu = -t_\lambda^\lambda I.$$

2.4. Isomorphisme S . — L'algèbre extérieure du dual de T est isomorphe (en tant qu'espace vectoriel) à l'algèbre de CLIFFORD de (T, g) . On en déduit une application linéaire S du $\mathcal{F}(V)$ -module des champs de formes complexes sur le $\mathcal{F}(V)$ -module des champs de $(1, 1)$ spineurs. On a, si μ est un champ de formes complexes,

$$(7) \quad S(\mu) = \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \mu_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} \gamma^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2} \dots \gamma^{\alpha_m}.$$

Si n est pair, S est un isomorphisme du module des formes sur le module des $(1, 1)$ spineurs. Si n est impair, la restriction S^+ de S au module des formes paires est un isomorphisme du module des formes paires sur le module des $(1, 1)$ spineurs.

2.5. Connexions spinorielles. — Une connexion spinorielle est une connexion infinitésimale sur le fibré principal $S(V)$.

Etant donnée une connexion métrique ω sur V (c'est-à-dire une connexion sur le fibré principal $\mathcal{O}(V)$ des repères orthonormés), on définit une 1-forme sur $S(V)$ à valeurs dans $\underline{\text{Spin}}(n, k)$ par la condition

$$\forall W, \text{ vecteur tangent à } S(V), \quad \sigma(W) = (\chi')^{-1}(\omega(\tilde{\chi}W)),$$

où $\tilde{\chi}$ désigne encore le prolongement de $\tilde{\chi}: S(V) \rightarrow \mathcal{E}(V)$ aux vecteurs tangents. On vérifie que σ est une connexion spinorielle.

Etant donné sur un ouvert Ω de V une section locale ζ de $S(V)$, ω (resp. σ) définit sur Ω un champ de 1-formes $\omega_{\tilde{\zeta}}$ (resp. σ_ζ) à valeurs dans $\underline{SO}(n, k)$ (resp. $\underline{\text{Spin}}(n, k)$) et l'on a

$$(8) \quad \forall x \in \Omega, \quad \sigma_\zeta(x) = (\chi')^{-1}(\omega_{\tilde{\zeta}}(x)).$$

$\omega_{\tilde{\zeta}}$ (resp. $\sigma_{\tilde{\zeta}}$) est un champ local de matrices dont les éléments ω_{β}^{α} (resp. σ_j^i) sont des 1-formes sur Ω . On a d'après (4)

$$(9) \quad \forall x \in \Omega, \quad \sigma_{\tilde{\zeta}}(x) = -\frac{1}{4} \omega_{\beta}^{\alpha}(x) \gamma_{\alpha}(x) \gamma^{\beta}(x).$$

Les composantes dans le repère $\tilde{\chi}\zeta(x)$ du $(0, 1)$ tenseur $\omega_{\beta}^{\alpha}(x)$ (resp. $\sigma_j^i(x)$) sont désignées par $\omega_{\beta\mu}^{\alpha}(x)$ (resp. $\sigma_{j\mu}^i(x)$).

La connexion spinorielle canonique est la connexion spinorielle associée à la connexion métrique sans torsion (connexion riemannienne).

2.6. Dérivations covariantes. — Soit ψ un champ de $(1, 0)$ spineurs sur V . La dérivée covariante de ψ dans la connexion spinorielle σ est le champ de $(0, 1)$ tenseurs- $(1, 0)$ spineurs $\nabla\psi = d\psi + \sigma\psi$. Une section locale de $S(V)$ étant choisie, on a

$$(10) \quad \nabla_{\mu} \psi^i = \partial_{\mu} \psi^i + \sigma_{j\mu}^i \psi^j = \partial_{\mu} \psi^i - \frac{1}{4} \omega_{\beta\mu}^{\alpha} (\gamma_{\alpha} \gamma^{\beta})^i_j \psi^j.$$

On définit, par produit tensoriel et dualité, la dérivée covariante d'un champ de (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs dans une connexion métrique et la connexion spinorielle associée. On a

$$(11) \quad \nabla\gamma = 0.$$

On en déduit que l'isomorphisme S commute avec la dérivation covariante dans toute connexion spinorielle.

2.7. Courbure spinorielle. — La courbure d'une connexion spinorielle σ est la 2-forme sur $S(V)$ à valeurs dans $\text{Spin}(n, k)$ $d\sigma + \frac{1}{2}[\sigma, \sigma]$. La forme de courbure définit le $(0, 2)$ tenseur antisymétrique- $(1, 1)$ spineur de courbure Π . Si σ est associée à la connexion métrique ω et si R désigne le tenseur de courbure de la connexion ω , alors

$$(12) \quad \Pi_{j, \alpha\beta}^i = -\frac{1}{4} R_{\mu, \alpha\beta}^{\lambda} (\gamma_{\lambda} \gamma^{\mu})^i_j.$$

On peut écrire l'identité de Ricci pour les tenseurs-spineurs. Pour un $(1, 0)$ spineur ψ , on obtient

$$(13) \quad (\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} - \nabla_{\beta} \nabla_{\alpha}) \psi^i = \Pi_{j, \alpha\beta}^i \psi^j.$$

Dans la suite, on notera ∇ la dérivation covariante dans la connexion riemannienne ω et la connexion spinorielle canonique σ .

3. — Conjugaison et adjonction, spineurs positifs et négatifs.

On note $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$ la conjugaison des nombres complexes.

3.1. Conjugaison. — La conjugaison des spineurs C vérifie par définition les propriétés suivantes:

- C est un automorphisme de l'anneau $\mathfrak{A}(V)$ des champs de tenseurs-spineurs, $\mathcal{F}(V)$ -semi-linéaire, homogène de degré 0 et commutant avec les contractions;
- sur les tenseurs, C coïncide avec la conjugaison des nombres et des tenseurs complexes;
- si n est pair ou si n est impair et $(\nu + k)$ pair, C laisse invariant le $(0, 1)$ tenseur- $(1, 1)$ spineur fondamental γ ;
- si n et $(\nu + k)$ sont impairs, C est tel que $C\gamma = -\gamma$.

Supposons n pair (resp. impair). Pour tout $(1, 1)$ spineur λ il existe une forme (resp. une forme paire) unique μ telle que $\lambda = S\mu$. On montre que

$$(14) \quad C\lambda = S\bar{\mu}.$$

La conjugaison commute avec la dérivation covariante dans toute connexion spinorielle.

3.2. Adjonction. — L'adjonction des spineurs $\mathcal{A}$ vérifie par définition les propriétés suivantes:

- $\mathcal{A}$ est un antiautomorphisme de l'anneau $\mathfrak{A}(V)$ des champs de tenseurs-spineurs, $\mathcal{F}(V)$ -semi-linéaire, appliquant $\widetilde{S(V)}$ sur $\widetilde{S^*(V)}$ et commutant avec les contractions;
- sur les tenseurs, $\mathcal{A}$ coïncide avec la conjugaison des nombres et des tenseurs complexes;
- si n est pair ou si n et k sont impairs, $\mathcal{A}$ est tel que $\mathcal{A}\gamma = -\gamma$;
- si n est impair et k pair, $\mathcal{A}$ laisse invariant le $(0, 1)$ tenseur- $(1, 1)$ spineur fondamental γ .

Supposons n pair. Soit $\lambda = S\mu$ un $(1, 1)$ spineur. On est amené à introduire la décomposition

$$(15) \quad \mu = \sum_{m=0}^n \mu^m = \mu^0 + \mu^1 + \mu^2 + \mu^3,$$

où μ^a ($a = 0, 1, 2, 3$) est une somme de m -formes complexes telles que $m \equiv a \pmod{4}$.

On montre que

$$(16) \quad \mathcal{A}\lambda = S(\bar{\mu}^0 - \bar{\mu}^1 - \bar{\mu}^2 + \bar{\mu}^3) .$$

Supposons n impair. Soit $\lambda = S\mu$ un $(1, 1)$ spineur, la forme μ étant paire. On introduit de même la décomposition

$$(17) \quad \mu = \sum_{p=0}^r \mu^{2p} = \mu^0 + \mu^2 .$$

Quel que soit k , on a

$$(18) \quad \mathcal{A}\lambda = S(\bar{\mu}^0 - \bar{\mu}^2) .$$

L'adjonction commute avec la dérivation covariante dans la connexion spinorielle canonique.

3.3. Le $(0, 2)$ spineur fondamental I . — On pose $\mathcal{G} = \mathcal{A}\mathcal{C}$. La restriction de $\mathcal{G}$ aux $(1, 0)$ spineurs définit un isomorphisme du fibré vectoriel des $(1, 0)$ spineurs sur le fibré vectoriel des $(0, 1)$ spineurs; $\mathcal{G}$ définit donc un $(0, 2)$ spineur noté I , qu'on appelle parfois métrique spinorielle.

Supposons n pair et soit $\lambda = S\mu$ un $(1, 1)$ spineur. On a

$$(19) \quad \mathcal{G}\lambda = S(\mu^0 - \mu^1 - \mu^2 + \mu^3) .$$

Supposons n impair et soit $\lambda = S\mu$ un $(1, 1)$ spineur, la forme μ étant paire. On a

$$(20) \quad \mathcal{G}\lambda = S(\mu^0 - \mu^2) .$$

REMARQUE. — Une condition nécessaire et suffisante pour que le $(1, 1)$ spineur $\lambda = S\mu$ vérifie $\lambda + \mathcal{G}\lambda = 0$ est que $\mu^0 = \mu^3 = 0$ si n est pair, $\mu^0 = 0$ si n est impair.

Le $(0, 2)$ spineur fondamental I est à dérivée covariante nulle dans la connexion spinorielle canonique.

3.4. Spineurs positifs et négatifs. — T étant un espace vectoriel de dimension *paire*, on définit $S^+ = S \cap \mathbb{C}^+$ (espace des spineurs positifs) et $S^- = S \cap \mathbb{C}^-$ (espace des spineurs négatifs). On considère l'involution b de S définie par $b(\psi) = \psi$ si $\psi \in S^+$ et $b(\psi) = -\psi$ si $\psi \in S^-$.

V étant une variété spinorielle de dimension *paire*, il existe un automorphisme $\mathcal{B}$ et un seul du $\mathcal{F}(V)$ -module des champs de tenseurs-spineurs, automorphisme d'anneau, homogène de degré 0 et commutant avec les contractions, induisant l'identité sur les tenseurs et dont la restriction à l'espace vectoriel des $(1, 0)$ spineurs en tout point de V est l'involution ci-dessus.

On désigne par η la n -forme élément de volume de la variété riemannienne ou pseudo-riemannienne V . On pose

$$(21) \quad \theta = S\eta ,$$

et $\xi = j\theta$, avec $j = 1$ si $(\nu + k)$ est pair, $j = i$ si $(\nu + k)$ est impair. On a $\xi^2 = I$ et $\gamma = -\xi\gamma\xi^1$. On en déduit que

$$\forall \psi \in \underline{S(V)}, \quad \mathcal{B}\psi = \xi\psi \quad (\text{produit tensoriel contracté}).$$

Pour tout champ ψ de (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs, on pose

$$P^+ \psi = \psi^+ = \frac{1}{2}(\psi + \mathcal{B}\psi), \quad P^- \psi = \psi^- = \frac{1}{2}(\psi - \mathcal{B}\psi).$$

P^+ et P^- sont des projecteurs. Le noyau de P^+ (resp. P^-) est dit fibré des (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs positifs (resp. négatifs).

Soit $\lambda = S\mu$ un $(1, 1)$ spineur. On a

$$(22) \quad \mathcal{B}\lambda = \xi\lambda\xi^1 = \lambda^+ - \lambda^- = S(\mu^0 - \mu^1 + \mu^2 - \mu^3).$$

L'automorphisme $\mathcal{B}$ commute avec la dérivation covariante dans toute connexion spinorielle; par conséquent, le $(1, 1)$ spineur ξ est à dérivée covariante nulle dans toute connexion spinorielle.

* * *

NOTE BIBLIOGRAPHIQUE. — Outre les références déjà citées, on pourra consulter pour l'étude des algèbres de CLIFFORD et des groupes spinoriels [1], [2], [6], [7], [10], [13], [14] et [42]; pour l'étude des opérations sur les spineurs [5], [6], [36], [38] et [44]; pour l'étude des variétés spinorielles [12], [13], [18], [25] et [35].

CHAPITRE II

DÉRIVÉES DE LIE DES $(1, 0)$ SPINEURS

1. — Dérivées de Lie des vecteurs.

1.1. *Champs de vecteurs.* — Dans toute la suite, on considère une variété différentiable V de classe C^∞ , un champ de vecteurs X (ou transformation infinitésimale) de classe C^∞ sur V ou sur un voisinage d'un point x de V ; X est supposé réel.

$i(X)$ désigne le produit intérieur par X . Remarquons qu'il suffit de supposer V de classe C^p , $p \geq 2$.

Pour tout t appartenant à un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$, $\exp(-tX)'_x$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel tangent à V au point $\exp(tX)x = x(t)$ sur l'espace vectoriel tangent au point x . Soit Y un champ de vecteurs sur un voisinage de x , Y_y la valeur du champ Y en un point y . On posera $Y_t = \exp(-tX)'_x Y_{x(t)}$ (Y_t est un vecteur au point x). Plus généralement, on note $\exp(tX)^*_x$ l'isomorphisme de l'espace vectoriel des (p, q) tenseurs au point $x(t)$ sur l'espace vectoriel des (p, q) tenseurs au point x défini par le difféomorphisme local $\exp(-tX)$.

1.2. Dérivées de Lie (K. YANO [43], A. LICHNEROWICZ [27]). — Par définition, la dérivée de LIE au point x du champ de vecteurs Y par le champ de vecteurs X est le vecteur au point x

$$(1) \quad (\mathfrak{L}(X)Y)_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_t - Y_x}{t}.$$

$(\mathfrak{L}(X)Y)_x$ est encore défini si l'on suppose seulement Y défini sur l'intersection U d'un voisinage ouvert de x avec la trajectoire $x(t)$ passant par x , et X et Y de classe C^p , $p \geq 1$. $\mathfrak{L}(X)Y$ est alors un champ de vecteurs de classe C^{p-1} sur U .

1.3. Sections locales invariantes (A. LICHNEROWICZ [27], chap. II, § 18). — Soit x un point au voisinage duquel le champ de vecteurs X ne s'annule pas. On appelle section locale invariante par X une section Z de $E(V)$ au-dessus d'un voisinage Ω de x (champ de repères linéaires défini sur Ω) telle que, pour tout $y \in \Omega$, pour tout t appartenant à un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$ tel que $y(t)$ soit défini et appartienne à Ω ,

$$(2) \quad Z_{y(t)} = \exp(tX)'_y Z_y.$$

Soit x un point de V tel que $X_x \neq 0$; il existe au voisinage de x des sections locales invariantes par X prenant une valeur donnée Z_x au point x et les restrictions de ces sections locales invariantes à la trajectoire $x(t)$ de X coïncident.

Etant donnée une section locale z de $E(V)$ au-dessus d'un ouvert Ω , on désigne par $Y(z_y)$ les composantes du vecteur Y_y dans le repère z_y au point y de Ω et l'on considère l'application $Y_z: y \in \Omega \subset V \rightarrow Y(z_y) \in \mathbf{R}^n$. Une section locale Z de $E(V)$ est une section locale invariante par X si et seulement si, pour tout champ de vecteurs Y sur Ω , pour tout $y \in \Omega$,

$$(3) \quad (\mathfrak{L}(X)Y)(Z_y) = (i(X)d(Y_z))_y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y(Z_{y(t)}) - Y(Z_y)}{t}.$$

1.4. Cas d'une variété riemannienne ou pseudo-riemannienne. — Dans le cas d'une variété riemannienne ou pseudo-riemannienne, ∇ désignant la dérivation covariante

dans la connexion riemannienne, on a

$$(4) \quad \mathfrak{L}(X)Y = X^\lambda \nabla_\lambda Y - Y^\lambda \nabla_\lambda X,$$

soit

$$(5) \quad \mathfrak{L}(X)Y = i(X)\nabla Y - (\nabla X)Y,$$

où $(\nabla X)Y$ désigne l'action du champ de $(1, 1)$ tenseurs ∇X sur le champ de vecteurs Y .

On peut considérer $(\nabla X)_x$ comme un élément de $\underline{GL}(T_x)$, algèbre de LIE du groupe des automorphismes de T_x , espace vectoriel tangent à V au point x .

Etant donnée une section locale z du fibré des repères linéaires, au champ de $(1, 1)$ tenseurs ∇X est associé un champ local de matrices $(\nabla X)_x$, d'éléments $\nabla_\lambda X^\mu$.

On introduit la dérivée de LIE $\mathfrak{L}(X)g$ du $(0, 2)$ tenseur métrique g ,

$$(6) \quad (\mathfrak{L}(X)g)_{\lambda\mu} = \nabla_\lambda X_\mu + \nabla_\mu X_\lambda.$$

La divergence du champ de vecteurs X est, par définition, $\delta X = -\nabla_\lambda X^\lambda$. Le champ de vecteurs X est une isométrie infinitésimale si et seulement si $\mathfrak{L}(X)g = 0$. Le champ de vecteurs X est une transformation infinitésimale conforme si et seulement si X vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes:

$$(7) \quad \mathfrak{L}(X)g = -\frac{2}{n} \delta X g,$$

$$(8) \quad \exp(tX)_x^* g_{x(t)} = \exp\left(-\frac{2}{n} \int_0^t (\delta X)_{x(u)} du\right) g_x,$$

$$(9) \quad \|Y_t\| = \exp\left(\frac{1}{n} \int_0^t (\delta X)_{x(u)} du\right) \|Y_{x(t)}\|.$$

X est une isométrie infinitésimale si et seulement si X est une transformation infinitésimale conforme telle que $\delta X = 0$.

1.5. Dérivée de Lie d'un champ de repères linéaires. Matrices $B_i(X)$. — Soit z une section locale du fibré des repères linéaires, sur un ouvert Ω de V . C'est une famille $z = (e_\lambda)_{\lambda=1,2,\dots,n}$ de n champs de vecteurs linéairement indépendants. On définit $\mathfrak{L}(X)z$ comme la famille des n champs de vecteurs (indépendants ou non) $\mathfrak{L}(X)e_\lambda$. On pose

$$(10) \quad \mathfrak{L}(X)z = zB_i(X)$$

où $B_i(X)$ est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\underline{GL}(n)$.

Si V est une variété riemannienne ou pseudo-riemannienne, ω désignant la connexion riemannienne, on a

$$(11) \quad B_z(X) = i(X)(\omega_z) - (\nabla X)_z$$

et les éléments B_μ^λ du champ local de matrices $B_z(X)$ sont donnés par

$$(12) \quad B_\mu^\lambda = X^\nu \omega_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\mu X^\lambda.$$

Soit Y un champ de vecteurs sur Ω . On a sur Ω ,

$$(13) \quad (\mathfrak{L}(X)Y)(z) = i(X)d(Y_z) + B_z(X)Y(z).$$

Les sections locales Z invariantes par X sont caractérisées par l'une des deux propriétés équivalentes suivantes

$$B_z(X) = 0,$$

$$i(X)(\omega_z) = (\nabla X)_z.$$

Les champs locaux de matrices $B_z(X)$ ne définissent pas un champ de tenseurs du fait qu'intervient la forme de connexion.

2. – Dérivées de Lie des $(1, 0)$ spineurs.

2.1. Problème. – Soit V une variété spinorielle. Pour une transformation infinitésimale X quelconque, le groupe local à un paramètre de transformations locales $\exp(tX)$ agit sur les champs de tenseurs, mais non sur les champs de spineurs. On ne pourra donc pas généraliser directement aux champs de $(1, 0)$ spineurs la définition 1.2 de la dérivée de LIE d'un champ de vecteurs Y par le champ de vecteurs X . On utilisera la caractérisation 1.4 de la dérivée de LIE pour en donner une généralisation et l'on étudiera ensuite diverses interprétations de cette définition.

2.2. Application linéaire du module des $(1, 1)$ tenseurs dans le module des $(1, 1)$ spineurs. – En tout point x de V , $\underline{\text{Spin}}(T_x, g_x)$ est un sous-espace vectoriel réel de $\mathbb{C}^+(\mathfrak{C}_x, g_x)$, de dimension indépendante de x . $\text{Spin}(V) = \bigcup_{x \in V} \text{Spin}(T_x, g_x)$ et $\underline{\text{Spin}}(V) = \bigcup_{x \in V} \underline{\text{Spin}}(T_x, g_x)$ sont des fibrés de base V , avec un morphisme injectif de chacun de ces fibrés dans le fibré des algèbres de CLIFFORD réduites.

D'autre part, pour tout $x \in V$, il existe une application linéaire surjective α_x de $\underline{GL}(T_x)$ sur $\underline{SO}(T_x, g_x)$ (antisymétrisation relativement à la forme quadratique g_x) et un isomorphisme $(\chi'_x)^{-1}$ de $\underline{SO}(T_x, g_x)$ sur $\underline{\text{Spin}}(T_x, g_x)$ (chap. I, 1.6). On pose $\varrho_x = (\chi'_x)^{-1} \circ \alpha_x$. On en déduit l'existence d'un morphisme surjectif du fibré des

Si les repères z sont des repères orthonormés projection des repères spinoriels utilisés, alors $\lambda = 0$ et $\omega_{\lambda\mu\nu} + \omega_{\mu\lambda\nu} = 0$, d'où

$$\mathbb{L}(X)\psi = X^\lambda \partial_\lambda \psi - \frac{1}{8}(\partial_\lambda X_\mu - \partial_\mu X_\lambda) \gamma^\lambda \gamma^\mu \psi - \frac{1}{8} X^\nu (\omega_{\lambda\mu\nu} - \omega_{\lambda\nu\mu} - (\omega_{\mu\lambda\nu} - \omega_{\mu\nu\lambda})) \gamma^\lambda \gamma^\mu \psi.$$

2.5. Matrices d'ordre n et matrices d'ordre 2^n . Interprétation de la définition 2.3. — α , ϱ , χ' désignent les applications linéaires de $GL(n)$ sur $SO(n, k)$, de $GL(n)$ sur $\underline{Spin}(n, k)$ et de $SO(n, k)$ sur $\underline{Spin}(n, k)$ définies précédemment, et aussi les applications $\mathcal{F}(\Omega)$ -linéaires entre modules des sections des fibrés vectoriels triviaux de base Ω correspondants. Soit ζ une section locale du fibré des repères spinoriels définie sur Ω . On pose

$$(17) \quad \beta_\zeta(X) = \varrho B_{\bar{\chi}\zeta}(X).$$

On a, d'après (11) et chap. I, 2.5, (8),

$$(18) \quad \beta_\zeta(X) = i(X)(\sigma_\zeta) - \varrho(\nabla X)_{\bar{\chi}\zeta}$$

soit, en introduisant les matrices de DIRAC, et les composantes des tenseurs et des formes de connexion dans les repères orthonormés $\bar{\chi}\zeta$,

$$\beta_\zeta(X) = -\frac{1}{4} X^\nu \omega_{\mu\nu}^\lambda \gamma_\lambda \gamma^\mu - \frac{1}{8} (\nabla_\lambda X_\mu - \nabla_\mu X_\lambda) \gamma^\lambda \gamma^\mu.$$

La définition (15) s'écrit donc

$$(19) \quad (\mathbb{L}(X)\psi)(\zeta) = i(X)d(\psi_\zeta) + \beta_\zeta(X)\psi_\zeta.$$

Remarquons que l'on décompose ainsi le $(1, 0)$ spineur $\mathbb{L}(X)\psi$ en somme de deux quantités qui ne sont pas des spineurs.

2.6. Dérivée de Lie d'un champ de repères spinoriels. — Par définition, on pose

$$(20) \quad \mathbb{L}(X)\zeta = \zeta\beta_\zeta(X).$$

On généralise ainsi de manière naturelle la relation (10), puisque, $B_{\bar{\chi}\zeta}(X)$ n'étant pas en général un champ de matrices appartenant à $\underline{SO}(n, k)$, on est conduit à introduire la définition (17) qui s'écrit encore

$$\chi'\beta_\zeta(X) = \alpha B_{\bar{\chi}\zeta}(X).$$

2.7. Sections locales de $S(V)$ invariantes par une isométrie infinitésimale. — Soit X une isométrie infinitésimale définie sur un ouvert Ω de V . Au voisinage de tout point x de Ω tel que $X_x \neq 0$, il existe une section locale ζ de $S(V)$ telle que la

section locale $\tilde{\chi}\zeta$ de $\mathcal{E}(V)$ (donc de $E(V)$) obtenue par projection soit invariante par X , et prenant une valeur donnée au point x ; une telle section locale de $S(V)$ est dite invariante par X ; deux sections locales invariantes par X prenant même valeur au point x ont même restriction à la trajectoire $x(t)$ de X passant par x .

En effet, soit ζ_x un repère spinoriel au point x . X étant une isométrie infinitésimale, il existe sur un voisinage Ω' de x une section locale Z de $\mathcal{E}(V)$ invariante par X et prenant la valeur $\tilde{\chi}\zeta_x$ au point x . $S(V)$ est un revêtement de $\mathcal{E}(V)$ (chap. I, 2.1). Au-dessus de tout voisinage de x simplement connexe, contenu dans Ω' , il existe une section locale ζ de $S(V)$ et une seule telle que $\tilde{\chi}\zeta = Z$ et prenant la valeur ζ_x au point x .

Les sections locales ζ de $S(V)$ invariantes par X sont caractérisées par $B_{\tilde{\chi}\zeta}(X) = 0$. X étant une isométrie infinitésimale et $\tilde{\chi}\zeta$ étant un champ local de repères orthonormés, on a

$$B_{\tilde{\chi}\zeta}(X) = \alpha B_{\zeta}(X);$$

d'où une condition nécessaire et suffisante pour que ζ soit une section locale de $S(V)$ invariante par X :

$$\beta_{\zeta}(X) = 0.$$

ζ étant une section locale de $S(V)$ invariante par X , on considère l'application $\psi_{\zeta}: y \in \Omega \subset V \rightarrow \psi(\zeta_y) \in \mathbb{C}^{2^n}$, et l'on a, d'après la relation (19),

$$(21) \quad (\mathfrak{L}(X)\psi)(\zeta_x) = (i(X)d(\psi_{\zeta}))_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(\zeta_{x(t)}) - \psi(\zeta_x)}{t}.$$

REMARQUE. — Sous les hypothèses faites, on peut prendre (21) pour définition de la dérivée de LIE de ψ par X au point x .

3. — Dérivation $\bar{\mathfrak{L}}$ sur les vecteurs. Sections locales semi-invariantes.

Afin d'étudier la dérivation de LIE des spineurs, on va définir un nouvel opérateur $\bar{\mathfrak{L}}(X)$ sur les champs de vecteurs.

3.1. *Etude de $\alpha B_z(X)$.* — D'après la relation (11), on a

$$(22) \quad \alpha B_z(X) = i(X)(\alpha\omega_z) - \alpha(\nabla X)_z = B_z(X) + \frac{1}{2}(\mathfrak{L}(X)g)(z) - i(X)(\omega_z - \alpha\omega_z).$$

Si z est une section locale du fibré des repères orthonormés, alors $\alpha\omega_z = \omega_z$ et les conditions suivantes sont équivalentes

- 1) $\alpha B_z(X) = 0,$
- 2) $i(X)(\omega_z) = \alpha(\nabla X)_z,$
- 3) $B_z(X) + \frac{1}{2}(\mathfrak{L}(X)g)(z) = 0.$

3.2. Opérateur $\bar{\mathfrak{L}}(X)$ sur les champs de vecteurs. — A tout champ de vecteurs Y , on associe le champ de vecteurs

$$(23) \quad \bar{\mathfrak{L}}(X)Y = \mathfrak{L}(X)Y + \frac{1}{2}(\mathfrak{L}(X)g)Y.$$

Pour tout champ local z de repères orthonormés, on a

$$(24) \quad (\bar{\mathfrak{L}}(X)Y)(z) = i(X)d(Y_z) + \alpha B_z(X)Y(z).$$

C'est la relation (13) où l'on a remplacé $B_z(X)$ par $\alpha B_z(X)$.

$\bar{\mathfrak{L}}(X)$ coïncide avec $\mathfrak{L}(X)$ si et seulement si X est une isométrie infinitésimale.

Cas d'une transformation infinitésimale conforme. — Si X est une transformation infinitésimale conforme, d'après (7), (23) s'écrit

$$(25) \quad \bar{\mathfrak{L}}(X)Y = \mathfrak{L}(X)Y - \frac{1}{n}\delta X Y.$$

Supposons $X_x \neq 0$. Pour tout t assez petit, on considère le vecteur $\bar{Y}_t$ de même « longueur » que $Y_{x(t)}$, colinéaire au vecteur Y_t . D'après (9), on a

$$(26) \quad \bar{Y}_t = \exp\left(-\frac{1}{n}\int_0^t (\delta X)_{x(u)} du\right) Y_t.$$

En particulier, $\bar{Y}_0 = Y_0 = Y_x$. On montre facilement que

$$(27) \quad (\bar{\mathfrak{L}}(X)Y)_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\bar{Y}_t - Y_x}{t}.$$

3.3. Opérateur $\bar{\mathfrak{L}}(X)$ sur les champs de repères orthonormés. — Comme au § 1.5, on définit $\bar{\mathfrak{L}}(X)z$ comme la famille des n champs de vecteurs $\bar{\mathfrak{L}}(X)e_\lambda$. Si z est un champ de repères orthonormés, la relation (24) montre que

$$(28) \quad \bar{\mathfrak{L}}(X)z = z\alpha B_z(X)$$

relation analogue à (10). On a encore

$$\bar{\mathfrak{L}}(X)z = \mathfrak{L}(X)z + \frac{1}{2}z(\mathfrak{L}(X)g)(z).$$

Si X est une transformation infinitésimale conforme, alors

$$(29) \quad \bar{\mathfrak{L}}(X)z = \mathfrak{L}(X)z - \frac{1}{n}\delta X z.$$

3.4. Sections locales semi-invariantes. — On suppose $X_x \neq 0$. Etant donné un repère orthonormé Z_x au point x , on va montrer qu'il existe une section $\bar{Z}$ du fibré des repères orthonormés, définie sur l'intersection U d'un voisinage de x avec la courbe $x(t)$, prenant la valeur Z_x au point x et telle que, pour tout t appartenant à l'intervalle de définition,

$$(30) \quad (\alpha B_x(X))_{x(t)} = 0.$$

D'après la relation (24) on aura alors l'interprétation simple de $\bar{\mathbb{L}}(X)Y$:

$$(31) \quad \forall y \in U, \quad (\bar{\mathbb{L}}(X)Y)(Z_y) = (i(X)d(Y_{\bar{Z}}))_y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y(\bar{Z}_{y(t)}) - Y(Z_y)}{t}.$$

Une section locale $\bar{Z}$ du fibré des repères orthonormés vérifiant (30) est dite section locale semi-invariante par X . S'il existe une section locale Z de $\mathcal{O}(V)$ invariante par X , alors Z est une section locale semi-invariante. Il en est ainsi si et seulement si X est une isométrie infinitésimale.

Désignons par $Z_{x(t)}$ la restriction à la trajectoire $x(t)$ de l'une des sections locales invariantes par X prenant la valeur Z_x au point x et cherchons à déterminer un champ $A(t)$ de matrices régulières tel que $\bar{Z} = ZA$ soit un champ de repères orthonormés vérifiant la condition (30).

Etude de la condition (30). — On déduit de (11) que, pour des champs de repères z et zA quelconques,

$$B_{zA}(X) = \bar{A}^1 B_z(X) A + \bar{A}^1 \frac{dA}{dt}.$$

Si Z est une section locale invariante par X , $B_z(X) = 0$, donc $\bar{Z} = ZA$ vérifie

$$B_{\bar{Z}}(X) = \bar{A}^1 \frac{dA}{dt}.$$

La condition (30) est donc équivalente à

$$\alpha \left(\bar{A}^1 \frac{dA}{dt} \right) = 0$$

soit, en posant $t_k(A) = A - 2\alpha A$,

$$A \frac{d(t_k(A))}{dt} = \frac{dA}{dt} t_k(A).$$

On notera I_k la matrice diagonale comportant k termes égaux à $+1$ puis $(n-k)$ termes égaux à -1 . Une matrice A est dite k -symétrique si $t_k(A) = A$, k -anti-symétrique si $\alpha A = A$. On a $t_k(A) = I_k {}^t A I_k$ (où ${}^t A$ désigne la transposée de A). On voit que $t_k(AB) = t_k(B)t_k(A)$.

Condition pour que $\bar{Z} = ZA$ soit un champ de repères orthonormés. — On désigne par $G(t)$ (resp. $\bar{G}(t)$) la matrice du $(0, 2)$ tenseur métrique $g_{x(t)}$ au point $x(t)$ dans la base $Z_{x(t)}$ (resp. $\bar{Z}_{x(t)}$). On a

$$\bar{G}(t) = {}^tA(t)G(t)A(t).$$

La condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{Z}_{x(t)}$ soit un repère orthonormé est $\bar{G}(t) = I_k$. Posant $H(t) = (G(t))^{-1}I_k$ (H est un champ de matrices k -symétriques dépendant de X et x), la condition nécessaire et suffisante pour que le champ $\bar{Z} = ZA$ soit un champ de repères orthonormés s'écrit

$$At_k(A) = H.$$

En résumé, une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{Z}$ soit une section locale semi-invariante par X est que $\bar{Z} = ZA$, A étant un champ de matrices régulières défini sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$, vérifiant

$$(I) \quad \begin{cases} (a) & A(0) = I \\ (b) & At_k(A) = H \\ (c) & A \frac{d(t_k(A))}{dt} = \frac{dA}{dt} t_k(A). \end{cases}$$

Le système (I) est équivalent à

$$(II) \quad \begin{cases} (a) & A(0) = I \\ (b) & At_k(A) = H \\ (d) & 2A \frac{d(t_k(A))}{dt} = \frac{dH}{dt}. \end{cases}$$

Il existe une matrice régulière P telle que $G = {}^tPMI_kP$, où M est une matrice diagonale à termes tous positifs. Posant $A_0 = \bar{P}^{-1}\sqrt{M}$, on a

$$H = A_0 t_k(A_0).$$

Le champ de matrices A_0 vérifie

$$(b'_0) \quad A_0 \frac{d(t_k(A_0))}{dt} + \frac{dA_0}{dt} t_k(A_0) = \frac{dH}{dt}.$$

Posons

$$B = \bar{A}_0^{-1}A \quad \text{et} \quad D = \frac{1}{2} \left(\bar{A}_0^{-1} \frac{dA_0}{dt} - \frac{d(t_k(A_0))}{dt} t_k(\bar{A}_0^{-1}) \right);$$

D est un champ de matrices k -antisymétriques. Le champ de matrices $A = A_0 B$ vérifie le système (II) si et seulement si B est un champ de matrices régulières défini sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$, vérifiant

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad B(0) = I \\ (e) \quad B^t B = I \\ (f) \quad B \frac{dB^t}{dt} = D. \end{array} \right.$$

En effet, on voit facilement que les relations (e), (b'_0) et (d) entraînent (f) et, inversement, (e), (b'_0) et (f) entraînent (d).

L'équation différentielle linéaire et homogène (f) a une solution maximale et une seule B , définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$ qui satisfasse à la condition initiale (a). D étant k -antisymétrique, cette solution B vérifie aussi la condition (e): en effet, $(d/dt)(^t B B) = -^t B ^t D B - ^t B D B = 0$, donc le champ B est un champ de matrices orthogonales. On en déduit que le système (II) admet une solution maximale et une seule $A = A_0 B$, ce qui démontre l'existence et l'unicité des sections locales semi-invariantes.

Cas d'une transformation infinitésimale conforme. — Si X est une transformation infinitésimale conforme, le repère $\bar{Z}_{x(t)}$ est le repère orthonormé déduit du repère orthogonal $Z_{x(t)}$ par normalisation des vecteurs de base. La matrice $A(t)$ est la matrice régulière diagonale $\exp \left(1/n \int_0^t (\delta X)_{x(u)} du \right) I$.

4. — Dérivation $\bar{\mathcal{L}}$ et groupe local de transformations.

4.1. *L'application $\overline{\text{exp}}(tX)^*$.* — On pose $\exp(tX)x = x(t) = M_x(t) = \mu_t(x)$. On suppose d'abord $X_x \neq 0$. Soit F l'application qui à tout $Z_x \in \mathcal{O}(V)$, repère orthonormé au point x de V , associe la section locale semi-invariante $\bar{Z} = F(Z_x)$, qui est une application d'un intervalle maximal I_{Z_x} (voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$) dans $\mathcal{O}(V)$

$$\bar{Z} = F(Z_x): t \in I_{Z_x} \rightarrow \bar{Z}_{x(t)} = F(Z_x)(t) \in \mathcal{O}(V)$$

vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} F(Z_x)(0) = Z_x, \\ pF(Z_x) = M_x, \\ (\alpha B_{F(Z_x)}(X))_{M_x} = 0. \end{array} \right.$$

De l'unicité des sections locales semi-invariantes, on déduit:

1) L'intervalle I_{z_x} dépend seulement du point $x = pZ_x$. En effet, soit $t \in I_{z_x}$ et soit $L \in O(n, k)$; on a $(F(Z_x)(t))L = Z(t)L(\bar{L}^{-1}A(t)L)$; posant $A' = \bar{L}^{-1}AL$, on vérifie que $(A')^{-1}(dA'/dt)$ est k -symétrique; donc $t \in I_{z_{xL}}$ et $F(Z_x L)(t) = (F(Z_x)(t))L$. On notera I_x l'intervalle relatif au point x .

2) L'intersection I_U des intervalles I_U pour $y \in U$ est non vide. En effet, si $2t \in I_x$, $F(Z_x)(2t)$ est une section locale semi-invariante prenant la valeur $F(Z_x)(t)$ au point $x(t)$, donc t appartient à l'intervalle relatif au point $x(t)$. Si $t, t', t + t' \in I_U$,

$$(32) \quad F(Z_x)(t + t') = F(F(Z_x)(t))(t').$$

DÉFINITION. — Soit Z_x un repère orthonormé au point x . On pose

$$(33) \quad \forall t \in I_x, \quad \forall Y \in T_{x(t)}, \quad (\overline{\exp}(tX)_x^* Y)(Z_x) = Y(F(Z_x)(t)).$$

On vérifie que $\overline{\exp}(tX)_x^* Y$ est un vecteur au point x indépendant du repère Z_x choisi. On définit ainsi une application linéaire $\overline{\exp}(tX)_x^*$ de $T_{x(t)}$ dans T_x .

Pour tous t et t' dans I_U , tels que $t + t' \in I_U$, on a, d'après (32),

$$(34) \quad \overline{\exp}((t + t')X)_x^* = \overline{\exp}(t'X)_{x(t)}^* \overline{\exp}(tX)_x^*.$$

PROPOSITION. — Pour tout $t \in I_U$, $\overline{\exp}(tX)^*$ définit un isomorphisme du module des champs de vecteurs sur U sur le module des champs de vecteurs sur $\mu_t U$, l'isomorphisme inverse étant $\overline{\exp}(-tX)^*$.

Lien avec l'opérateur $\bar{\mathcal{L}}(X)$. — Soit Y un champ de vecteurs sur U . On déduit de (31) et de la définition (33)

$$(35) \quad \forall y \in U, \quad (\bar{\mathcal{L}}(X) Y)_y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overline{\exp}(tX)_y^*(Y_{y(t)}) - Y_y}{t}.$$

D'où la propriété

$$(36) \quad \frac{d}{dt} (\overline{\exp}(tX)^* Y) = \overline{\exp}(tX)^* (\bar{\mathcal{L}}(X) Y)$$

c'est-à-dire, $\forall t \in I_U, \forall y \in U, (d/dt)(\overline{\exp}(tX)_y^*(Y_{y(t)})) = \overline{\exp}(tX)_y^*(\bar{\mathcal{L}}(X) Y)_{y(t)}$.

REMARQUE. — Y étant un vecteur au point $x(t)$, on a

$$\exp(-tX)'_x Y = \mathcal{A}(t) \exp(tX)_x^* Y,$$

où $\mathcal{A}(t)$ est le $(1, 1)$ tenseur au point x dont la matrice dans le repère Z_x est $A(t)$. En particulier, si X est une transformation infinitésimale conforme, $\exp(-tX)'_x Y$

et $\overline{\exp}(tX)_x^* Y$ sont colinéaires et

$$\exp(-tX)'_x Y = \exp\left(\frac{1}{n} \int_0^t (\delta X)_{x(u)} du\right) \overline{\exp}(tX)_x^* Y.$$

Supposons maintenant que $X_x = 0$ et que x est limite d'une suite de points $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tels que $X_{x_i} \neq 0$. Soit Y un vecteur au point $x(t)$ et soit (Y_i) une suite de vecteurs telle que Y_i soit un vecteur au point $x_i(t)$ et $\lim_{i \rightarrow \infty} Y_i = Y$. Alors, $\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{\exp}(tX)_{x_i}^* Y_i$ est un vecteur au point x indépendant des suites choisies. Par définition, ce vecteur est $\overline{\exp}(tX)_x^* Y$.

Supposons enfin que X soit nul sur un voisinage de x ; alors on a $x(t) = x$ et l'on pose $\overline{\exp}(tX)_x^* Y = Y$.

Les relations (34), (35) et (36) s'étendent au cas où le champ de vecteurs X s'annule.

4.2. Cas des variétés analytiques. — On suppose que V est une variété analytique et que les champs de vecteurs X et Y sont analytiques. L'application $\bar{Y}: t \in I_x \rightarrow \bar{Y}(t) = Y(F(Z_x)(t)) = (\overline{\exp}(tX)_x^* Y)(Z_x) \in \mathbf{R}^n$ est alors analytique. D'après la relation (36) et la définition (33),

$$\forall t \in I_x, \quad (\bar{\mathcal{L}}(X)Y)(F(Z_x)(t)) = \frac{d\bar{Y}(t)}{dt},$$

d'où, par récurrence sur l'entier i ,

$$(\bar{\mathcal{L}}^i(X)Y)(Z_x) = \frac{d^i \bar{Y}(0)}{dt^i}.$$

On en déduit que pour t assez petit,

$$\bar{Y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} (\bar{\mathcal{L}}^i(X)Y)(Z_x).$$

Il existe un voisinage I'_x de 0 dans $\mathbf{R}$ tel que

$$(37) \quad \forall t \in I'_x, \quad \overline{\exp}(tX)_x^* Y = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} (\bar{\mathcal{L}}^i(X)Y)_x.$$

5. — Interprétation géométrique de la dérivation de Lie des $(1, 0)$ spineurs.

5.1. Sections locales de $\mathcal{S}(V)$ semi-invariantes. — On suppose que V est une variété spinorielle. On suppose $X_x \neq 0$. Etant donné un repère spinoriel ζ_x au point x , il existe une section ζ du fibré des repères spinoriels, définie sur l'intersection U d'un voisinage de x avec la courbe $x(t)$, prenant la valeur ζ_x au point x et telle que

$\bar{\chi}\zeta = \bar{Z}$, $\bar{Z}$ étant la section locale semi-invariante par X prenant la valeur $Z_x = \bar{\chi}\zeta_x$ au point x (la démonstration est celle de 2.7). Une telle section est unique (on considère la solution maximale). Elle est dite section locale de $S(V)$ semi-invariante par X .

La notion de section locale de $S(V)$ semi-invariante par la transformation infinitésimale quelconque X généralise la notion de section locale de $S(V)$ invariante par une isométrie infinitésimale définie en 2.7: si X est une isométrie infinitésimale, une section locale de $S(V)$ semi-invariante par X est une section locale de $S(V)$ invariante par X .

ζ étant une section locale de $S(V)$ semi-invariante par X , on a sur l'intervalle de définition,

$$(\beta_\zeta(X))_{x(t)} = 0.$$

D'après la relation (19), pour tout champ ψ de $(1, 0)$ spineurs sur U , on a donc

$$(38) \quad \forall y \in U, \quad (\mathfrak{L}(X)\psi)(\zeta_y) = (i(X)d(\psi_\zeta))_y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(\zeta_{y(t)}) - \psi(\zeta_y)}{t}.$$

5.2. L'application $\exp(tX)^*$ sur les $(1, 0)$ spineurs. — On suppose d'abord $X_x \neq 0$. De manière analogue à la définition de 4.1, on définit un isomorphisme $\exp(tX)_x^*$ de $S_{x(t)}$ sur S_x par

$$(39) \quad \forall \psi \in S_{x(t)}, \quad (\exp(tX)_x^* \psi)(\zeta_x) = \psi(\zeta_{x(t)}).$$

Comme en 4.1, on démontre grâce à l'unicité des sections locales de $S(V)$ semi-invariantes l'existence d'un voisinage I_U de 0 dans $\mathbf{R}$ tel que pour tous t et t' dans I_U , tels que $t + t' \in I_U$,

$$(40) \quad \exp((t + t')X)_x^* = \exp(t'X)_{x(t)}^* \exp(tX)_x^*.$$

PROPOSITION. — Pour tout $t \in I_U$, $\exp(tX)^*$ définit un isomorphisme du module des champs de $(1, 0)$ spineurs sur U sur le module des champs de $(1, 0)$ spineurs sur $\mu_t U$, l'isomorphisme inverse étant $\exp(-tX)^*$.

Lien avec l'opérateur $\mathfrak{L}(X)$. — Soit ψ un champ de $(1, 0)$ spineurs sur U . On déduit de (38) et de la définition (39)

$$(41) \quad \forall y \in U, \quad (\mathfrak{L}(X)\psi)_y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\exp(tX)_y^*(\psi_{y(t)}) - \psi_y}{t}.$$

D'où la propriété

$$(42) \quad \frac{d}{dt} (\exp(tX)^* \psi) = \exp(tX)^* (\mathfrak{L}(X)\psi).$$

Si $X_x = 0$, on définit encore $\exp(tX)_x^*$ par les mêmes procédés qu'en 4.1. Les relations (40), (41) et (42) s'étendent au cas où le champ de vecteurs X s'annule.

Si V est une variété analytique et si X et ψ sont analytiques, il existe un voisinage I'_x de 0 dans $\mathbf{R}$ tel que

$$(43) \quad \forall t \in I'_x, \quad \exp(tX)_x^*(\psi_{x(t)}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} (\mathfrak{L}^i(X)\psi)_x.$$

5.3. Transformé d'un $(1, 0)$ spineur par une transformation conforme. — Le rapport d'une transformation conforme μ est la fonction réelle positive R telle que $\mu^*g = R^2g$.

Soit μ un difféomorphisme de la variété spinorielle V appartenant à un groupe de LIE G contenu dans la composante connexe de l'identité du groupe des transformations conformes de V . Il existe $X_1, X_2, \dots, X_a$ dans l'algèbre de LIE $\underline{G}$ de G et $t_1, t_2, \dots, t_a$ dans $\mathbf{R}$ tels que

$$\mu = \exp(t_a X_a) \dots \exp(t_2 X_2) \exp(t_1 X_1).$$

PROPOSITION. — Si

$$\exp(t_a X_a) \dots \exp(t_1 X_1) = \exp(t'_b X'_b) \dots \exp(t'_1 X'_1),$$

alors

$$\exp(t_a X_a)^* \dots \exp(t_1 X_1)^* = \exp(t'_b X'_b)^* \dots \exp(t'_1 X'_1)^*.$$

En effet, compte tenu de la caractérisation du champ de repères $\bar{Z}$ quand il s'agit d'une transformation infinitésimale conforme (fin du § 3.4), il suffit de remarquer que le rapport d'un produit de transformations conformes est le produit des rapports.

Cette proposition justifie la

DÉFINITION. — On pose $\mu^* = \exp(t_a X_a)^* \dots \exp(t_2 X_2)^* \exp(t_1 X_1)^*$.

CHAPITRE III

DÉRIVATIONS DE L'ALGÈBRE DES TENSEURS-SPINEURS

On suppose la variété spinorielle V de classe C^∞ . On considère l'algèbre $\mathfrak{A}(V)$ des champs de tenseurs-spineurs sur la variété V (chap. I, 2.3). On voit facilement (2.1) que, étant donné un champ de vecteurs X sur V , il existe une dérivation $\mathfrak{L}(X)$ et une seule de l'algèbre $\mathfrak{A}(V)$ (considérée comme algèbre sur $\mathbf{C}$) homogène de degré 0, commutant avec les contractions et coïncidant sur les tenseurs et sur les

(1, 0)spineurs avec la dérivation de LIE (chap. II). Aux §§ 3, 4 et 5, on étudie plus généralement les dérivations de $\mathfrak{A}(V)$ homogènes de degré 0 et commutant avec les contractions.

Si l'on suppose seulement la variété V de classe C^p , $p \geq 2$, on considère ces dérivations comme des applications linéaires de l'algèbre des champs de tenseurs-spineurs de classe C^p dans l'algèbre des champs de tenseurs-spineurs de classe C^{p-1} .

1. – Étude algébrique.

On trouvera les définitions concernant les dérivations dans C. CHEVALLEY [11], chap. V, § 6 ou S. KOBAYASHI et K. NOMIZU [21], chap. I, §§ 2 et 3. On note $\mathfrak{A}_1(V)$ le sous-module des champs de (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs, $0 \leq p + q \leq 1$, $0 \leq r + s \leq 1$. Localement, $\mathfrak{A}_1(V)$ engendre l'algèbre $\mathfrak{A}(V)$. Toute dérivation de l'algèbre sur $\mathbf{R}$ des champs de tenseurs réels sur V se prolonge de façon unique en une dérivation de l'algèbre sur $\mathbf{C}$ des champs de tenseurs complexes sur V .

1.1. Dérivations homogènes de degré 0. – Pour qu'un endomorphisme $\mathcal{M}$ de $\mathfrak{A}_1(V)$ soit la restriction d'une dérivation de $\mathfrak{A}(V)$ homogène de degré 0, il faut et il suffit qu'il respecte la décomposition en somme directe et qu'il vérifie la règle de LEIBNIZ, c'est-à-dire

$$\forall a \in \mathfrak{A}_1(V), \quad \forall b \in \mathfrak{A}_1(V), \quad a \otimes b \in \mathfrak{A}_1(V), \quad \mathcal{M}(a \otimes b) = \mathcal{M}(a) \otimes b + a \otimes \mathcal{M}(b).$$

On en déduit: l'opération de restriction est un isomorphisme de l'algèbre de LIE des dérivations de $\mathfrak{A}(V)$ homogènes de degré 0 sur l'algèbre de LIE des endomorphismes $\mathcal{M}$ de $\mathfrak{A}_1(V)$ respectant la décomposition en somme directe et vérifiant

$$(1) \quad \forall f \in \mathcal{F}(V), \quad \forall a \in \mathfrak{A}_1(V), \quad \mathcal{M}(fa) = \mathcal{M}(f)a + f\mathcal{M}(a).$$

1.2. Dérivations qui commutent avec les contractions. – Dans $\mathfrak{A}(V)$, on définit les contractions C_k^n , h et k étant deux entiers supérieurs ou égaux à 1 (qui sont définies sur les champs de (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs tels que $p \geq h$, $q \geq k$) (S. KOBAYASHI et K. NOMIZU [21], chap. I, § 2) et, de manière exactement analogue, les contractions spinorielles D_k^n , $h, k \geq 1$ (qui sont définies sur les champs de (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs tels que $r \geq h$, $s \geq k$).

Une dérivation de $\mathfrak{A}(V)$ commute avec toutes les contractions si et seulement si elle commute avec C_1^1 et D_1^1 .

1.3. Dérivations homogènes de degré 0 et commutant avec les contractions. – En rapprochant les résultats de 1.1 et de 1.2, on a:

PROPOSITION 1. – L'opération de restriction est un isomorphisme de l'algèbre de LIE des dérivations de $\mathfrak{A}(V)$, homogènes de degré 0 et commutant avec les con-

tractions, sur l'algèbre de LIE des endomorphismes $\mathcal{M}$ de l'espace vectoriel complexe des champs de $(1, 0)$ tenseurs- $(1, 0)$ spineurs qui respectent la décomposition en somme directe et qui vérifient la condition

(2) il existe un endomorphisme $\mathcal{M}_0$ de l'espace vectoriel complexe $\mathcal{F}(V)$ tel que

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{F}(V), \quad \forall X \in \underline{\mathcal{G}(V)}, \quad \mathcal{M}(fX) - f\mathcal{M}(X) &= \mathcal{M}_0(f)X, \\ \forall f \in \mathcal{F}(V), \quad \forall \psi \in \underline{S(V)}, \quad \mathcal{M}(f\psi) - f\mathcal{M}(\psi) &= \mathcal{M}_0(f)\psi. \end{aligned}$$

En effet, un tel endomorphisme $\mathcal{M}$ définit un endomorphisme de $\mathfrak{A}_1(V)$ vérifiant (1) et commutant avec C_1^1 et D_1^1 .

CONVENTION. — On appellera désormais dérivation de $\mathfrak{A}(V)$ une dérivation homogène de degré 0 et commutant avec les contractions.

1.4. *Dérivations nulles sur les fonctions.* — La restriction d'une dérivation aux $(1, 0)$ tenseurs (resp. $(1, 0)$ spineurs) est la multiplication par un $(1, 1)$ tenseur (resp. $(1, 1)$ spineur) si et seulement si sa restriction aux fonctions est nulle. En effet, la restriction d'une dérivation aux $(1, 0)$ tenseurs (resp. $(1, 0)$ spineurs) est une application $\mathcal{F}(V)$ -linéaire si et seulement si sa restriction aux fonctions est nulle. Soit $\mathcal{D}$ une dérivation de l'algèbre des tenseurs-spineurs nulle sur les fonctions et soit D le $(1, 1)$ spineur tel que $\forall \psi \in \underline{S(V)}$, $\mathcal{D}\psi = D\psi$. Alors $\forall \psi \in \underline{S^*(V)}$, $\mathcal{D}\psi = -\psi D$ et $\forall \psi \in \underline{S(V)} \otimes \underline{S^*(V)}$, $\mathcal{D}\psi = D\psi - \psi D$.

En particulier, une dérivation nulle sur les tenseurs est définie par le $(1, 1)$ spineur D .

1.5. *Dérivations nulles sur les $(1, 1)$ tenseurs (resp. $(1, 1)$ spineurs).* — La restriction d'une dérivation aux $(1, 0)$ tenseurs (resp. $(1, 0)$ spineurs) est la multiplication par une fonction complexe si et seulement si sa restriction aux $(1, 1)$ tenseurs (resp. $(1, 1)$ spineurs) est nulle. On utilise d'abord le résultat de 1.4, puis l'on remarque qu'un $(1, 1)$ tenseur (resp. $(1, 1)$ spineur) qui commute avec tout $(1, 1)$ tenseur (resp. $(1, 1)$ spineur) est le produit de l'identité par une fonction scalaire.

2. — Dérivation de Lie des tenseurs-spineurs.

2.1. *Définition.* — Il résulte immédiatement de la définition de la dérivée de LIE des $(1, 0)$ spineurs par un champ de vecteurs X (chap. II, 2.3) et de la proposition 1, 1.3, qu'il existe une dérivation $\mathfrak{L}(X)$ et une seule de l'algèbre $\mathfrak{A}(V)$, appelée dérivation de LIE des tenseurs-spineurs, prolongeant la dérivation de LIE des tenseurs et des $(1, 0)$ spineurs.

On dira qu'un champ ψ de tenseurs-spineurs est invariant par la transformation infinitésimale X si sa dérivée de LIE par le champ de vecteurs X , $\mathfrak{L}(X)\psi$, est nulle.

Soit ψ un champ de (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs. Soit $\mathcal{R}_{q,s}^{p,r}$ la représentation correspondante de $GL(n) \times \text{Spin}(n, k)$ et soit $\underline{\mathcal{R}}_{q,s}^{p,r}$ la représentation induite par $\mathcal{R}_{q,s}^{p,r}$ sur l'algèbre de LIE produit $GL(n) \times \text{Spin}(n, k)$ (voir A. LICHNEROWICZ [26], § 33). La dérivée de LIE de ψ par le champ de vecteurs X est donnée par

$$(3) \quad \mathfrak{L}(X)\psi = i(X)\nabla\psi + \underline{\mathcal{R}}_{q,s}^{p,r}(\nabla X, \tau(\nabla X))\psi.$$

Les formules explicites sont les suivantes (cf. Y. KOSMANN [22]). La définition adoptée ici est différente. De plus, p. 291, dans le troisième terme de la formule (7), lire « $(\nabla_j X^i)$ » au lieu de « $(\nabla^i X_{j_i})$ »; à la même page, après la ligne « si $q = r = 0$, $s = 0$, $t = 1$ », rétablir comme suit: « $\mathfrak{L}(X)\psi = X^k \nabla_k \psi - \frac{1}{4}(\nabla_j X_i) \psi \gamma^i \gamma^j$ »:

$$(4) \quad \forall \psi \in \underline{S^*(V)}, \quad \mathfrak{L}(X)\psi = X^\lambda \nabla_\lambda \psi + \frac{1}{8}(\nabla_\lambda X_\mu - \nabla_\mu X_\lambda) \psi \gamma^\lambda \gamma^\mu,$$

$$(5) \quad \forall \psi \in \underline{S(V) \otimes S^*(V)}, \quad \mathfrak{L}(X)\psi = X^\lambda \nabla_\lambda \psi + \frac{1}{4}(\nabla_\mu X_\lambda)(\gamma^\lambda \gamma^\mu \psi - \psi \gamma^\lambda \gamma^\mu),$$

$$(6) \quad \forall \psi \in \underline{\mathfrak{S}(V) \otimes S(V) \otimes S^*(V)}, \quad \mathfrak{L}(X)\psi = X^\lambda \nabla_\lambda \psi - (\nabla_\lambda X) \psi^\lambda + \\ + \frac{1}{4}(\nabla_\mu X_\lambda)(\gamma^\lambda \gamma^\mu \psi - \psi \gamma^\lambda \gamma^\mu),$$

$$(7) \quad \forall \psi \in \underline{S^*(V) \otimes S^*(V)}, \quad (\mathfrak{L}(X)\psi)_{ij} = X^\lambda \nabla_\lambda \psi_{ij} + \\ + \frac{1}{8}(\nabla_\lambda X_\mu - \nabla_\mu X_\lambda)(\psi_{ik}(\gamma^\lambda \gamma^\mu)^k_j + \psi_{kj}(\gamma^\lambda \gamma^\mu)^k_i).$$

2.2. Interprétation géométrique. — On étend aux tenseurs-spineurs les notations du chap. II. Soit x un point de V tel que $X_x \neq 0$ et ζ_x un repère spinoriel au point x . Soit Z une section locale de $E(V)$ invariante par X et prenant la valeur $\tilde{\chi}\zeta_x$ au point x et ζ la section locale de $S(V)$ semi-invariante par X et prenant la valeur ζ_x au point x . Alors

$$(8) \quad (\mathfrak{L}(X)\psi)(\zeta_x) = (i(X)d(\psi_{Z,\zeta}))_x$$

où $\psi_{Z,\zeta}$ désigne l'application qui à tout point y de l'intersection U d'un voisinage de x avec la courbe $x(t)$ associe les composantes du tenseur-spineur ψ dans les repères linéaire Z_y et spinoriel ζ_y en ce point. Cette relation généralise les relations (3), chap. II, 1.3, et (38), chap. II, 5.1.

2.3. L'application $\exp(tX)^*$ sur les tenseurs-spineurs. — On généralise la définition donnée au chap. II, 5.2. On suppose d'abord $X_x \neq 0$. ψ étant un (p, q) tenseur- (r, s) spineur au point $x(t)$, on pose

$$(9) \quad (\exp(tX)_x^* \psi)(\zeta_x) = \psi(Z_{x(t)}, \zeta_{x(t)}).$$

Toutes les propriétés de l'application $\exp(tX)^*$ sur les $(1, 0)$ spineurs énoncées au chap. II, 5.2, sont valables pour l'application $\exp(tX)^*$ sur les tenseurs-spineurs, en particulier les relations (40), (41), (42) et (43). La restriction de l'application

$\exp(tX)^*$ aux tenseurs est bien l'application notée aussi $\exp(tX)^*$ définie par le difféomorphisme local $\exp(-tX)$ (chap. II, 1.1).

2.4. *Transformé d'un tenseur-spineur par une transformation conforme.* — On utilise la proposition, chap. II, 5.3. μ étant une transformation conforme qui s'écrit

$$\mu = \exp(t_a X_a) \dots \exp(t_2 X_2) \exp(t_1 X_1),$$

on pose

$$\mu^* = \exp(t_a X_a)^* \dots \exp(t_2 X_2)^* \exp(t_1 X_1)^*.$$

En particulier, si $V = \mathbf{R}^n$ et si μ est l'homothétie de rapport $R > 0$, on a, pour tout champ ψ de (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs,

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad (\mu^* \psi)_x = R^{-p+q} \psi_{\mu x}.$$

Définition du poids conforme. — Soit X une transformation infinitésimale conforme. Le rapport R_t de la transformation conforme $\exp(tX)$ est, d'après (8), chap. II, 1.4,

$$R_t = \exp \left(-\frac{1}{n} \int_0^t (\delta X)_{\mu, \mu} du \right).$$

Soit ψ un champ de (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs. S'il existe un nombre réel c tel que, pour toute transformation infinitésimale conforme X , et pour tout t dans l'intervalle de définition,

$$(C) \quad \exp(tX)^* \psi = R_t^{-c-p+q} \psi,$$

le nombre réel c est dit poids conforme de ψ .

On a alors, pour toute transformation conforme μ appartenant à la composante connexe de l'identité (dans le groupe conforme), de rapport R ,

$$\mu^* \psi = R^{-c-p+q} \psi.$$

Remarquons que la condition (C) est équivalente à

$$(C') \quad \mathfrak{L}(X) \psi = (c + p - q) \frac{1}{n} \delta X \psi.$$

2.5. *Dérivée de Lie du tenseur-spineur fondamental.* — g désignant le $(0, 2)$ tenseur métrique, on pose

$$(\mathfrak{L}(X)g)_{\lambda}^{\mu} = g^{\mu\nu} (\mathfrak{L}(X)g)_{\lambda\nu} = \nabla_{\lambda} X^{\mu} + \nabla^{\mu} X_{\lambda}.$$

γ désigne le $(1, 0)$ tenseur- $(1, 1)$ spineur fondamental de V . De la relation fondamentale (5), chap. I, 2.3, on déduit

$$(10) \quad (\mathfrak{L}(X)\gamma)^\lambda = -\frac{1}{2}(\nabla_\mu X^\lambda + \nabla^\lambda X_\mu)\gamma^\mu = -\frac{1}{2}(\mathfrak{L}(X)g)^\lambda_\mu \gamma^\mu.$$

PROPOSITION 2. — Le $(1, 0)$ tenseur- $(1, 1)$ spineur fondamental γ est invariant par le champ de vecteurs X si et seulement si X est une isométrie infinitésimale.

PROPOSITION 3. — $\mathfrak{L}(X)\gamma$ est proportionnel à γ si et seulement si le champ de vecteurs X est une transformation infinitésimale conforme.

En effet, X est conforme si et seulement si $\mathfrak{L}(X)g$ est proportionnel à g .

Si X est conforme, on a (d'après chap. II, 1.4, (7))

$$(11) \quad \mathfrak{L}(X)\gamma = \frac{1}{n} \delta X \gamma.$$

REMARQUE. — On a, d'après la relation (6), chap. I, 2.3,

$$(12) \quad (\mathfrak{L}(X)\gamma)^\lambda \gamma_\lambda = -\delta X.$$

Dérivée de Lie du $(0, 1)$ tenseur- $(1, 1)$ spineur fondamental. — Notons provisoirement $\hat{\gamma}$ le $(0, 1)$ tenseur- $(1, 1)$ spineur fondamental pour le distinguer du $(1, 0)$ tenseur- $(1, 1)$ spineur fondamental γ . On a

$$(\mathfrak{L}(X)\hat{\gamma})_\lambda = -g_{\lambda\mu}(\mathfrak{L}(X)\gamma)^\mu.$$

Dans la suite $(\mathfrak{L}(X)\gamma)_\lambda$ désignera toujours $g_{\lambda\mu}(\mathfrak{L}(X)\gamma)^\mu$ et non $(\mathfrak{L}(X)\hat{\gamma})_\lambda$.

Dérivée de Lie de $\overset{(m)}{\gamma}$. — Soit $\overset{(m)}{\gamma}$ le $(m, 0)$ tenseur- $(1, 1)$ spineur défini par $\overset{(m)}{\gamma}^{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m} = \gamma^{\lambda_1} \gamma^{\lambda_2} \dots \gamma^{\lambda_m}$. On a

$$(13) \quad (\mathfrak{L}(X)\overset{(m)}{\gamma})^{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m} = \sum_{l=1}^m \gamma^{\lambda_1} \gamma^{\lambda_2} \dots \gamma^{\lambda_{l-1}} (\mathfrak{L}(X)\gamma)^{\lambda_l} \gamma^{\lambda_{l+1}} \dots \gamma^{\lambda_m}.$$

Si X est conforme, d'après (11), on a

$$(14) \quad \mathfrak{L}(X)\overset{(m)}{\gamma} = \frac{m}{n} \delta X \overset{(m)}{\gamma}.$$

Les relations (11) et (14) montrent que le $(1, 0)$ tenseur- $(1, 1)$ spineur γ et le $(m, 0)$ tenseur- $(1, 1)$ spineur $\overset{(m)}{\gamma}$ sont de poids conforme 0.

Poids conforme d'un $(1, 1)$ spineur. — Soit $\overset{m}{\mu}$ une m -forme de poids conforme c_m . On a

$$\mathfrak{L}(X)S\overset{m}{\mu} = c_m \frac{1}{n} \delta X S\overset{m}{\mu}.$$

Si l'on suppose que toutes les formes μ^m , $m = 0, 1, \dots, n$, ont le même poids conforme c , le $(1, 1)$ spineur $\lambda = \sum_{m=0}^n S\mu^m$ est de poids conforme c .

3. – Dérivations qui prolongent la dérivation de Lie des tenseurs.

3.1. Condition algébrique. – Si $\mathcal{M}(X)$ est une dérivation de $\mathfrak{A}(V)$ qui prolonge la dérivation de LIE des tenseurs, sa restriction aux $(1, 0)$ spineurs est de la forme $\mathfrak{L}(X) + \lambda_X$, où $\mathfrak{L}(X)$ est la dérivation de LIE des $(1, 0)$ spineurs et où λ_X désigne un champ de $(1, 1)$ spineurs (ceci est une conséquence de 1.4). On dira que cette dérivation est définie par le $(1, 1)$ spineur λ_X . On a

$$(15) \quad \forall \psi \in \underline{S^*(V)}, \quad \mathcal{M}(X)\psi = \mathfrak{L}(X)\psi - \psi\lambda_X,$$

$$(16) \quad \forall \psi \in \underline{S(V) \otimes S^*(V)}, \quad \mathcal{M}(X)\psi = \mathfrak{L}(X)\psi + \lambda_X\psi - \psi\lambda_X,$$

$$(17) \quad \forall \psi \in \underline{S^*(V) \otimes S^*(V)}, \quad \mathcal{M}(X)\psi_{ij} = \mathfrak{L}(X)\psi_{ij} - \psi_{ik}(\lambda_X)_j^k - \psi_{kj}(\lambda_X)_i^k.$$

De plus, d'après 1.5, $\mathfrak{L}(X)$ et $\mathcal{M}(X)$ coïncident sur les $(1, 1)$ spineurs si et seulement si λ_X est le produit de l'identité par une fonction scalaire. Si, par exemple, cette fonction est choisie égale à $\kappa\delta X$, où κ est un nombre réel, la dérivation correspondante sera notée $\mathfrak{L}_\kappa(X)$. On étudiera la famille des dérivations $\mathfrak{L}_\kappa(X)$, $\kappa \in \mathbf{R}$, au § 5.

3.2. Condition géométrique. – On cherche à quelle condition (portant sur le champ de $(1, 1)$ spineurs λ_X) la restriction $\mathcal{M}(X) = \mathfrak{L}(X) + \lambda_X$ de la dérivation $\mathcal{M}(X)$ aux $(1, 0)$ spineurs admet une interprétation géométrique analogue à celle donnée au chap. II, 5.1, pour la dérivation de LIE des $(1, 0)$ spineurs. On cherche à quelle condition il existe un champ $\tilde{\zeta}$ de repères spinoriels au-dessus de la courbe $x(t)$ tel que

$$(18) \quad (\mathcal{M}(X)\psi)(\tilde{\zeta}_v) = (i(X)d(\psi\tilde{\zeta}))_v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(\tilde{\zeta}_{v(t)}) - \psi(\tilde{\zeta}_v)}{t}.$$

Posons $\tilde{\zeta} = \zeta A$, où A est un champ de matrices à valeurs dans $\text{Spin}(n, k)$. Compte tenu des propriétés de ζ (chap. II, 5.1, (38)), on voit que

$$\lambda_X(\tilde{\zeta}_{x(t)}) = - (A_{x(t)})^{-1} \frac{dA_{x(t)}}{dt},$$

ce qui signifie que le champ de $(1, 1)$ spineurs λ_X doit être à valeurs dans $\underline{\text{Spin}}(V)$ (chap. II, 2.2), considéré ici comme sous-fibré du fibré des $(1, 1)$ spineurs. Inversement si λ_X est à valeurs dans $\underline{\text{Spin}}(V)$, il existe un champ A de matrices à valeurs

dans $\text{Spin}(n, k)$ tel que

$$A_{x(t)} \frac{d(A_{x(t)})^{-1}}{dt} = \lambda_x(\tilde{\zeta}_{x(t)})$$

donc tel que $\tilde{\zeta} = \zeta A$ vérifie (18). Dans l'hypothèse où λ_x est à valeurs dans $\underline{\text{Spin}}(V)$, une étude directe analogue à celle du chap. II, 3.4, montre qu'il existe un champ de repères orthonormés $\tilde{Z}$ tel que $(\alpha B_{\tilde{Z}}(X))_{x(t)} = -(M_x(\tilde{Z}))_{x(t)}$, où $M_x = \chi'(\lambda_x)$ est un champ de $(1, 1)$ tenseurs antisymétriques relativement à g ; cela permet d'étudier l'opérateur $\tilde{\mathcal{L}}(X)$ sur les champs de vecteurs défini par $\tilde{\mathcal{L}}(X)Y = \tilde{\mathcal{L}}(X)Y + M_x Y$.

En résumé, l'interprétation géométrique est possible si et seulement si le champ de $(1, 1)$ spineurs λ_x est à valeurs dans $\underline{\text{Spin}}(V)$.

REMARQUE. — Parmi les dérivations $\mathcal{L}_x(X)$, seule la dérivation de LIE $\mathcal{L}(X)$ ($x=0$) peut s'interpréter géométriquement de la manière précédente.

3.3. *Dérivations nulles sur les tenseurs.* — On précise ici le résultat de 1.5. $\mathcal{D}$ étant une dérivation nulle sur les tenseurs, on a $(\mathcal{D}\hat{\gamma})_\lambda = g_{\lambda\mu}(\mathcal{D}\gamma)^\mu$. γ désignera indifféremment le $(1, 0)$ tenseur- $(1, 1)$ spineur ou le $(0, 1)$ tenseur- $(1, 1)$ spineur fondamental $\hat{\gamma}$.

LEMME 1. — Soit $\mathcal{D}$ une dérivation nulle sur les tenseurs. La restriction de $\mathcal{D}$ aux $(1, 1)$ spineurs est nulle si et seulement si $\mathcal{D}\gamma = 0$.

En effet, $\mathcal{D}\gamma = 0$ entraîne, pour tout m , $0 \leq m \leq n$, $\mathcal{D}\gamma^{(m)} = 0$. En considérant l'isomorphisme S , on en déduit que $\mathcal{D}$ est nulle sur tout $(1, 1)$ spineur.

LEMME 2. — Soit $\mathcal{D}$ une dérivation nulle sur les tenseurs. La restriction de $\mathcal{D}$ aux $(1, 0)$ spineurs est la multiplication par une fonction scalaire si et seulement si $\mathcal{D}\gamma = 0$.

C'est une conséquence de 1.5 et du lemme 1.

LEMME 3. — Soit $\mathcal{D}$ une dérivation nulle sur les tenseurs et soit D le $(1, 1)$ spineur qui la définit. Soit ε une 2-forme. On a $(\mathcal{D}\gamma)_\lambda = \varepsilon_{\mu\lambda}\gamma^\mu$ si et seulement s'il existe une fonction complexe $f \in \mathcal{F}(V)$ vérifiant

$$D = -\frac{1}{4}\varepsilon_{\lambda\mu}\gamma^\lambda\gamma^\mu + fI.$$

En effet, il s'agit de trouver tous les $(1, 1)$ spineurs D qui vérifient la relation $D\gamma_\lambda - \gamma_\lambda D = \varepsilon_{\mu\lambda}\gamma^\mu$. Une solution particulière est $-\frac{1}{4}\varepsilon_{\lambda\mu}\gamma^\lambda\gamma^\mu$. Un $(1, 1)$ spineur D est solution si et seulement si $D + \frac{1}{4}\varepsilon_{\lambda\mu}\gamma^\lambda\gamma^\mu$ commute avec γ_λ , pour tout $\lambda = 1, 2, \dots, n$. D'où le lemme.

3.4. *Opérateur $\mathcal{L}'(X)$ sur les $(1, 1)$ spineurs* (Y. KOSMANN [23]). — L'application linéaire S définie au chap. I, 2.4, se prolonge, par produit tensoriel avec l'application identique, en une application linéaire, encore notée S , du module des formes à va-

leurs dans le fibré des (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs sur le module $\underline{\mathfrak{A}}_{q, s+1}^{pr+1}(V)$ des champs de (p, q) tenseurs- $(r+1, s+1)$ spineurs. La somme directe des modules $\underline{\mathfrak{A}}_{q, s+1}^{pr+1}(V)$ pour $(p, q, r, s) \in \mathbf{N}^4$ est notée $\mathfrak{A}_1^1(V)$. Si n est pair, on définit ainsi un isomorphisme S du module des formes à valeurs dans $\mathfrak{A}(V)$ sur $\mathfrak{A}_1^1(V)$. Si n est impair, la restriction S^+ de S au module des formes paires à valeurs dans $\mathfrak{A}(V)$ est un isomorphisme; on convient dans ce cas de noter encore S^1 l'isomorphisme inverse $(S^+)^{-1}$.

EXEMPLES. — Désignons par $\bar{g}$ le $(1, 1)$ tenseur associé au $(0, 2)$ tenseur métrique g et par $\tilde{g}$ le $(2, 0)$ tenseur associé à g . On a

$$(19) \quad S^1 \hat{p} = g, \quad S^1 \gamma = \bar{g},$$

$$(20) \quad S^1 \hat{\gamma}^{(2)} = -\tilde{g} + \hat{\alpha} \quad \text{avec} \quad \hat{\alpha}_{\nu\rho}^{2\lambda\mu} = g_{\nu}^{\lambda} g_{\rho}^{\mu} - g_{\rho}^{\lambda} g_{\nu}^{\mu}.$$

D'autre part, $\mathfrak{L}(X)\gamma = -\frac{1}{2}S(\mathfrak{L}(X)g)$, où $\mathfrak{L}(X)g$ est considéré comme une 1-forme à valeurs vectorielles.

Commutation de S avec la dérivation de Lie. — Soit μ une forme sur V à valeurs dans $\mathfrak{A}(V)$. D'après les propriétés de $\mathfrak{L}(X)$ et de S , compte tenu de l'antisymétrie des composantes de μ , on a

$$(21) \quad \mathfrak{L}(X)(S\mu) - S(\mathfrak{L}(X)\mu) = \sum_{m=1}^n \frac{1}{(m-1)!} \mu_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m} (\mathfrak{L}(X)\gamma)^{\lambda_1} \gamma^{\lambda_2} \dots \gamma^{\lambda_m},$$

soit

$$(22) \quad \mathfrak{L}(X) \circ S - S \circ \mathfrak{L}(X) = S \circ i(\mathfrak{L}(X)\gamma).$$

DÉFINITION. — On peut définir un nouvel opérateur $\mathfrak{L}'(X)$ sur $\mathfrak{A}_1^1(V)$ par

$$(23) \quad \mathfrak{L}'(X) = S \circ \mathfrak{L}(X) \circ S^1.$$

D'après (22), on a

$$\mathfrak{L}(X) = \mathfrak{L}'(X) + S \circ i(\mathfrak{L}(X)\gamma) \circ S^1 = S \circ (\mathfrak{L}(X) + i(\mathfrak{L}(X)\gamma)) \circ S^1.$$

EXEMPLE. — On a $S^1 \gamma = \bar{g}$, donc $\mathfrak{L}'(X)\gamma = S(\mathfrak{L}(X)\bar{g}) = 0$.

Condition nécessaire et suffisante pour que $\mathfrak{L}(X)$ et S commutent. — On suppose n pair (resp. impair). $\mathfrak{L}(X)$ et S commutent sur les formes (resp. les formes paires) à valeurs dans $\mathfrak{A}(V)$ si et seulement si $\mathfrak{L}'(X)$ est égal à la restriction de $\mathfrak{L}(X)$ à $\mathfrak{A}_1^1(V)$.

PROPOSITION 4. — Les deux opérateurs $\mathfrak{L}(X)$ et $\mathfrak{L}'(X)$ coïncident sur $\mathfrak{A}_1^1(V)$ si et seulement si X est une isométrie infinitésimale.

En effet, la condition s'écrit $\mathfrak{L}(X)\gamma = 0$. On applique alors la proposition 2, 2.5.

Remarquons que les deux opérateurs $\mathfrak{L}(X)$ et $\mathfrak{L}'(X)$ coïncident sur $\mathfrak{A}_1^1(V)$ si et seulement s'ils coïncident sur les $(1, 1)$ spineurs.

Cas d'une transformation infinitésimale conforme. — Si m désigne un entier (resp. un entier pair) tel que $0 \leq m \leq n$, on appelle *composante homogène de degré m* d'un $(1, 1)$ spineur ψ , et l'on note $\overset{m}{\psi}$, l'image par S de la composante de degré m de la forme $S^1\psi$.

Pour une transformation infinitésimale conforme X , d'après la relation (11), 2.5, on a, si n est pair,

$$(24) \quad \mathfrak{L}(X)\psi - \mathfrak{L}'(X)\psi = \frac{1}{n} \delta X \sum_{m=1}^n m \overset{m}{\psi}.$$

Si n est impair, la sommation doit être faite pour m pair seulement.

PROPOSITION 5. — L'opérateur $\mathfrak{L}'(X)$ est la restriction à l'espace vectoriel $\mathfrak{A}_1^1(V)$ d'une dérivation de $\mathfrak{A}(V)$ coïncidant avec la dérivation de LIE sur les tenseurs si et seulement si X est une isométrie infinitésimale.

Pour montrer que la condition est nécessaire, considérons l'action de $\mathfrak{L}'(X)$ sur le $(2, 0)$ tenseur- $(1, 1)$ spineur $\overset{(2)}{\gamma} = D_1^2(\gamma \otimes \gamma)$. D'après la relation (20), on a $\mathfrak{L}'(X)\overset{(2)}{\gamma} = -S(\mathfrak{L}(X)\tilde{g})$. Si $\mathfrak{L}'(X)$ est la restriction d'une dérivation, on doit avoir

$$\mathfrak{L}'(X)\overset{(2)}{\gamma} = D_1^2(\mathfrak{L}'(X)\gamma \otimes \gamma) + D_1^2(\gamma \otimes \mathfrak{L}'(X)\gamma) = 0,$$

donc $\mathfrak{L}(X)g = 0$.

3.5. *Dérivées des $(1, 1)$ spineurs de degré n .* — On a posé (chap. I, 3.4) $\theta = S\eta$, où η est la n -forme élément de volume de la variété V . $*$ désigne l'adjonction des formes. On sait que $\nabla\eta = 0$, donc

$$(25) \quad \mathfrak{L}(X)\eta = -\delta X\eta.$$

On suppose n pair.

Etude de $\mathfrak{L}(X)\theta$. — En utilisant la relation (5), 2.1, on trouve

$$\mathfrak{L}(X)\theta = \frac{1}{4}(\nabla_\mu X_\lambda)(\gamma^\lambda \gamma^\mu \theta - \theta \gamma^\lambda \gamma^\mu).$$

Puisque θ commute avec tout $(1, 1)$ spineur pair, on a

$$(26) \quad \mathfrak{L}(X)\theta = 0.$$

On peut vérifier cette relation en calculant $\mathfrak{L}(X)(S\eta)$ par la relation (22), 3.4. Quel que soit le champ de vecteurs X , le $(1, 1)$ spineur θ est invariant par X .

Le $(1, 1)$ spineur θ est de poids conforme 0.

Etude de $\mathcal{M}(X)\theta$. — On considère une dérivation $\mathcal{M}(X)$ prolongeant la dérivation de LIE des tenseurs, définie par le $(1, 1)$ spineur λ_X (3.1). On a d'après les relations (16), 3.1, et (26)

$$\mathcal{M}(X)\theta = \lambda_X\theta - \theta\lambda_X.$$

PROPOSITION 6. — Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{M}(X)\theta = 0$ est que λ_X soit un $(1,1)$ spineur pair.

CAS PARTICULIER 1. — Si le champ de $(1,1)$ spineurs λ_X est à valeurs dans $\underline{\text{Spin}}(V)$, alors $\mathcal{M}(X)\theta = 0$.

CAS PARTICULIER 2. — Quel que soit le nombre réel κ , $\mathfrak{L}_\kappa(X)\theta = 0$.

Soit μ_X la forme telle que $\lambda_X = S\mu_X$. On introduit la décomposition (15), chap. I, 3.2,

$$\mu_X = \sum_{m=0}^n \mu_X^m = \mu_X^0 + \mu_X^1 + \mu_X^2 + \mu_X^3.$$

D'après les relations

$$\lambda_X \theta = S \sum_{p=0}^n (-1)^{p(p+1)/2} (*\mu_X^p),$$

$$0\lambda_X = S \sum_{p=0}^n (-1)^{p(p-1)/2} (*\mu_X^p)$$

(où $*$ désigne l'adjonction des formes), on a

$$\mathcal{M}(X)\theta = 2S \sum_{q \geq 0} (-1)^{q+1} * \binom{2q+1}{\mu_X} = 2S(-*\mu_X^1 + *\mu_X^3).$$

Généralisation aux $(1,1)$ spineurs de degré n (images par S des n -formes). — Soit ν une n -forme sur V . Il existe une fonction complexe $f \in \mathcal{F}(V)$ telle que $\nu = f\eta$. On a donc $S\nu = fS\eta = f\theta$, et, de la relation $\mathfrak{L}(X)(S\eta) - S\mathfrak{L}(X)\eta = \delta X S\eta$, on déduit, pour toute n -forme ν ,

$$\mathfrak{L}(X)(S\nu) - S\mathfrak{L}(X)\nu = \delta X S\nu,$$

ou encore

$$(\mathfrak{L}(X) - \mathfrak{L}'(X))(S\nu) = \delta X S\nu.$$

PROPOSITION 7. — La restriction de $\mathfrak{L}(X) - \mathfrak{L}'(X)$ aux $(1,1)$ spineurs de degré n est la multiplication par la fonction δX .

Cas d'une dérivation quelconque. — On a de même

$$\mathcal{M}(X)(S\nu) - S\mathcal{M}(X)\nu = \delta X S\nu + f\mathcal{M}(X)\theta.$$

Si l'on pose $\mathcal{M}'(X) = S \circ \mathcal{M}(X) \circ S^{-1}$, la relation ci-dessus s'écrit

$$(\mathcal{M}(X) - \mathcal{M}'(X))(S\nu) = \delta X S\nu + f\mathcal{M}(X)\theta.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que la restriction de $\mathcal{M}(X) - \mathcal{M}'(X)$ aux $(1,1)$ spineurs de degré n soit nulle est que X soit à divergence nulle et que λ_X soit un $(1,1)$ spineur pair.

4. – Commutation des dérivations avec les opérateurs classiques sur les spineurs.

4.1. *Conjugaison.* – Soit C la conjugaison sur V (chap. I, 3.1). La conjugaison commute avec la dérivation covariante et l'on a $C\overset{(2)}{\gamma} = \overset{(2)}{\gamma}$; on en déduit

$$(27) \quad \forall \kappa \in \mathbf{R}, \quad C\mathfrak{L}_\kappa(X) - \mathfrak{L}_\kappa(X)C = 0.$$

Quel que soit le champ de vecteurs X , quel que soit le nombre réel κ , la conjugaison commute avec la dérivation $\mathfrak{L}_\kappa(X)$.

$\mathcal{M}(X)$ étant une dérivation prolongeant la dérivation de LIE des tenseurs, définie par le $(1,1)$ spineur $\lambda_X = S\mu_X$, on a

$$\forall \psi \in \underline{S(V)}, \quad (C\mathcal{M}(X) - \mathcal{M}(X)C)\psi = (C\lambda_X - \lambda_X)C\psi.$$

On utilise la relation (14), chap. I, 3.1:

La conjugaison commute avec la dérivation $\mathcal{M}(X)$ si et seulement si la forme μ_X est réelle.

4.2. *Adjonction.* – Soit $\mathcal{A}$ l'adjonction sur V (chap. I, 3.2). L'adjonction commute avec la dérivation covariante dans la connexion spinorielle canonique; de $\mathcal{A}(\gamma^\lambda \gamma^\mu) + \gamma^\lambda \gamma^\mu = -2g^{\lambda\mu}$ et du fait que dans $\mathfrak{L}(X)\psi$ intervient seulement l'antisymétrisé $\tau(\nabla X)$, on déduit

$$(28) \quad \mathcal{A}\mathfrak{L}(X) - \mathfrak{L}(X)\mathcal{A} = 0.$$

Quel que soit le champ de vecteurs X , l'adjonction commute avec la dérivation de LIE par X .

On a, pour une dérivation $\mathcal{M}(X)$,

$$\forall \psi \in \underline{S(V)}, \quad (\mathcal{A}\mathcal{M}(X) - \mathcal{M}(X)\mathcal{A})\psi = (\mathcal{A}\psi)(\lambda_X + \mathcal{A}\lambda_X).$$

On utilise les relations (16) et (18), chap. I, 3.2:

Si n est pair, l'adjonction commute avec la dérivation $\mathcal{M}(X)$ si et seulement si les formes $(i\mu_X^0)$, μ_X^1 , μ_X^2 et $(i\mu_X^3)$ sont réelles. Si n est impair, l'adjonction commute avec la dérivation $\mathcal{M}(X)$ si et seulement si les formes $(i\mu_X^0)$ et μ_X^2 sont réelles.

On a, pour tout champ ψ de (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs,

$$\forall \kappa \in \mathbf{R}, \quad (\mathcal{A}\mathfrak{L}_\kappa(X) - \mathfrak{L}_\kappa(X)\mathcal{A})\psi = 2(r-s)\kappa\delta X\mathcal{A}\psi.$$

Pour que l'adjonction commute avec $\mathfrak{L}_\kappa(X)$ ($\kappa \neq 0$) il faut et il suffit que le champ de vecteurs X soit à divergence nulle.

4.3. *Dérivée de Lie du $(0, 2)$ spineur fondamental Γ .* — On considère l'automorphisme $\mathfrak{G} = \mathcal{AC}$ (chap. I, 3.3). Des relations (27) et (28) on déduit

$$(29) \quad \mathfrak{G}\mathfrak{L}(X) - \mathfrak{L}(X)\mathfrak{G} = 0.$$

Quel que soit le champ de vecteurs X , l'automorphisme $\mathfrak{G}$ commute avec la dérivation de LIE par X .

On a, pour une dérivation $\mathcal{M}(X)$,

$$(30) \quad \forall \psi \in \underline{S(V)}, \quad (\mathfrak{G}\mathcal{M}(X) - \mathcal{M}(X)\mathfrak{G})\psi = (\mathfrak{G}\psi)(\lambda_X + \mathfrak{G}\lambda_X).$$

On utilise les relations (19) et (20), chap. I, 3.3:

Si n est pair, l'automorphisme $\mathfrak{G}$ commute avec la dérivation $\mathcal{M}(X)$ si et seulement si les formes μ_X^0 et μ_X^3 sont nulles. Si n est impair, l'automorphisme $\mathfrak{G}$ commute avec la dérivation $\mathcal{M}(X)$ si et seulement si la forme μ_X^0 est nulle.

On a, pour tout champ ψ de (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs,

$$(31) \quad \forall \kappa \in \mathbf{R}, \quad (\mathfrak{G}\mathfrak{L}_\kappa(X) - \mathfrak{L}_\kappa(X)\mathfrak{G})\psi = 2(r-s)\kappa\delta X\mathfrak{G}\psi.$$

Pour que l'automorphisme $\mathfrak{G}$ commute avec $\mathfrak{L}_\kappa(X)$ ($\kappa \neq 0$) il faut et il suffit que le champ de vecteurs X soit à divergence nulle.

La relation (29) et les relations (30) et (31) appliquées aux $(1, 0)$ spineurs donnent l'expression de la dérivée du $(0, 2)$ spineur Γ dans les dérivations $\mathcal{M}(X)$:

$$(32) \quad \begin{cases} \forall \psi \in \underline{S(V)}, & (\mathcal{M}(X)\Gamma)\psi = -(\mathfrak{G}\psi)(\lambda_X + \mathfrak{G}\lambda_X), \\ \forall \kappa \in \mathbf{R}, & \mathfrak{L}_\kappa(X)\Gamma = -2\kappa\delta X\Gamma. \end{cases}$$

Quel que soit le champ de vecteurs X , le $(0, 2)$ spineur fondamental Γ est invariant par X .

Le $(0, 2)$ spineur fondamental Γ est de poids conforme 0. D'autre part le $(0, 2)$ tenseur métrique g est de poids conforme 0. On en déduit:

Le poids conforme ne dépend pas de la position des indices tensoriels ni spinoriels.

REMARQUE. — Soit $\mathcal{D}$ une dérivation nulle sur les tenseurs et soit D le $(1, 1)$ spineur qui la définit. Désignant ici par $\cdot$ la multiplication des matrices, on voit que

$$\forall \psi \in \underline{S(V)}, \quad (\mathcal{D}I) \cdot \psi = (\mathcal{D}\mathcal{G} - \mathcal{G}\mathcal{D})\psi = -(\mathcal{G}\psi) \cdot (D + \mathcal{G}D) = -I \cdot \psi \cdot (D + \mathcal{G}D).$$

De plus, si l'on pose $(D \cdot I)_{ab} = D^c{}_a I_{cb}$, alors $\mathcal{D}I = -D \cdot I - I \cdot D$. Donc les trois conditions suivantes sont équivalentes

- 1) $\mathcal{D}I = 0$,
- 2) $D + \mathcal{G}D = 0$,
- 3) $D \cdot I + I \cdot D = 0$.

La remarque, chap. I, 3.3, donne une condition nécessaire et suffisante pour que $D + \mathcal{G}D = 0$.

4.4. *Automorphisme $\mathcal{B}$.* — On suppose n pair. Les définitions sont celles du chap. I, 3.4. Les résultats de 3.5 montrent que

$$(33) \quad \forall \kappa \in \mathbf{R}, \quad \mathcal{B}\mathcal{L}_\kappa(X) - \mathcal{L}_\kappa(X)\mathcal{B} = 0.$$

Quel que soit le champ de vecteurs X , quel que soit le nombre réel κ , l'automorphisme $\mathcal{B}$ commute avec la dérivation $\mathcal{L}_\kappa(X)$.

L'automorphisme $\mathcal{B}$ commute avec la dérivation $\mathcal{M}(X)$ si et seulement si la forme μ_X est paire. On a

$$\begin{aligned} \forall \psi \in \underline{S(V)}, \quad (\mathcal{B}\mathcal{M}(X) - \mathcal{M}(X)\mathcal{B})\psi &= -j\mathcal{M}(X)\theta\psi \\ &= 2jS(*\mu_X^1 - *\mu_X^3)\psi. \end{aligned}$$

Décomposition en spineurs positifs et négatifs. — Pour tout champ ψ de (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs, on a donc

$$\forall \kappa \in \mathbf{R}, \quad (\mathcal{L}_\kappa(X)\psi)^+ = \mathcal{L}_\kappa(X)(\psi^+), \quad (\mathcal{L}_\kappa(X)\psi)^- = \mathcal{L}_\kappa(X)(\psi^-).$$

Quel que soit le champ de vecteurs X , quel que soit le nombre réel κ , les projecteurs P^+ et P^- commutent avec la dérivation $\mathcal{L}_\kappa(X)$.

4.5. *Conclusion.* — On peut dresser le tableau des conditions nécessaires et suffisantes sur les formes μ_X^a pour que les opérateurs envisagés commutent avec la dérivation $\mathcal{M}(X)$.

Supposons d'abord n pair:

Applications	μ_x^0	μ_x^1	μ_x^2	μ_x^3
C	réelle	réelle	réelle	réelle
$\mathcal{A}$	imag.	réelle	réelle	imag.
$\mathfrak{G}$	0			0
$(C \text{ et } \mathcal{A}) \text{ ou } (C \text{ et } \mathfrak{G}) \text{ ou } (\mathcal{A} \text{ et } \mathfrak{G}) \text{ ou } (C, \mathcal{A} \text{ et } \mathfrak{G})$	0	réelle	réelle	0
$\mathcal{B}$		0		0
$C \text{ et } \mathcal{B}$	réelle	0	réelle	0
$\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}$	imag.	0	réelle	0
$\mathfrak{G} \text{ et } \mathcal{B}$	0	0		0
$(C, \mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ ou } (C, \mathfrak{G} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ ou } (\mathcal{A}, \mathfrak{G} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ ou } (C, \mathcal{A}, \mathfrak{G} \text{ et } \mathcal{B})$	0	0	réelle	0

PROPOSITION 8 (cas n pair). – Pour que le $(0, 2)$ spineur fondamental Γ et le $(1, 1)$ spineur $\theta = S\eta$ soient tous deux invariants par la dérivation $\mathcal{M}(X)$, il faut et il suffit que $\lambda_x = S\mu_x^2$. Pour que les opérateurs C , $\mathcal{A}$, $\mathfrak{G}$ et $\mathcal{B}$ commutent avec la dérivation $\mathcal{M}(X)$, il faut et il suffit que $\lambda_x = S\mu_x^2$, la forme μ_x^2 étant réelle, c'est-à-dire que le champ de $(1, 1)$ spineurs λ_x soit à valeurs dans $\underline{\text{Spin}}(V)$. En particulier, la dérivation de LIE commute avec C , $\mathcal{A}$, $\mathfrak{G}$ et $\mathcal{B}$.

Le fibré $\underline{\text{Spin}}(V)$ a été défini au chap. II, 2.2. Ces résultats sont à rapprocher de 3.2.

Supposons maintenant n impair: on vérifie que la partie du tableau concernant C , $\mathcal{A}$ et $\mathfrak{G}$ et les formes paires μ_x^0 et μ_x^2 est encore valable.

PROPOSITION 8 (cas n impair). – Pour que le $(0, 2)$ spineur fondamental Γ soit invariant par la dérivation $\mathcal{M}(X)$, il faut et il suffit que $\lambda_x = S\mu_x^2$. Pour que les opérateurs C , $\mathcal{A}$ et $\mathfrak{G}$ commutent avec la dérivation $\mathcal{M}(X)$, il faut et il suffit que $\lambda_x = S\mu_x^2$, la forme μ_x^2 étant réelle, c'est-à-dire que le champ de $(1, 1)$ spineurs λ_x soit à valeurs dans $\underline{\text{Spin}}(V)$. En particulier, la dérivation de LIE commute avec C , $\mathcal{A}$ et $\mathfrak{G}$.

5. — Dérivée de Lie par le crochet de deux champs de vecteurs.

5.1. Définition et propriétés de Θ_{κ} (Y. KOSMANN [24]). — Soient X et X' deux champs de vecteurs réels sur V . On pose

$$(34) \quad \Theta_{\kappa}(X, X') = \mathfrak{L}_{\kappa}([X, X']) - \mathfrak{L}_{\kappa}(X)\mathfrak{L}_{\kappa}(X') + \mathfrak{L}_{\kappa}(X')\mathfrak{L}_{\kappa}(X).$$

On note Θ au lieu de Θ_0 l'application correspondant à la dérivation de LIE.

LEMME 4. — Quel que soit κ , $\Theta_{\kappa}(X, X')$ est une dérivation nulle sur les tenseurs.

En effet, $\Theta_{\kappa}(X, X')$ est une dérivation car c'est la différence des deux dérivations $\mathfrak{L}_{\kappa}([X, X'])$ et $[\mathfrak{L}_{\kappa}(X), \mathfrak{L}_{\kappa}(X')]$. $\Theta_{\kappa}(X, X')$ est nulle sur les tenseurs car la restriction aux tenseurs de $\mathfrak{L}_{\kappa}(X)$ est par définition la dérivation de LIE $\mathfrak{L}(X)$ qui vérifie

$$\mathfrak{L}([X, X']) - [\mathfrak{L}(X), \mathfrak{L}(X')] = 0.$$

LEMME 5. — Quel que soit κ , $\Theta_{\kappa}(X, X')\Gamma = 0$.

On utilise la relation (32), 4.3. D'où

$$\Theta_{\kappa}(X, X')\Gamma = -2\kappa(\delta([X, X']) - \mathfrak{L}(X)(\delta X') + \mathfrak{L}(X')(\delta X))\Gamma.$$

On vérifie que la fonction réelle $\delta([X, X']) - \mathfrak{L}(X)(\delta X') + \mathfrak{L}(X')(\delta X)$ est identiquement nulle (par exemple à l'aide de (25), 3.5).

PROPOSITION 9. — Quel que soit κ , $\Theta_{\kappa} = \Theta$.

Quel que soit κ , $\Theta_{\kappa}(X, X')$ et $\Theta(X, X')$ ont même restriction aux $(1, 1)$ spineurs. D'après 1.5, il existe une fonction complexe $t_{\kappa}(X, X')$ telle que

$$\Theta_{\kappa}(X, X')\Gamma - \Theta(X, X')\Gamma = -2t_{\kappa}(X, X')\Gamma.$$

Du lemme 5, on déduit $t_{\kappa}(X, X') = 0$, soit $\Theta_{\kappa}(X, X') = \Theta(X, X')$.

5.2. Etude de $\Theta(X, X')$. — Soit $\Theta_{X, X'}$ le $(1, 1)$ spineur qui définit la dérivation nulle sur les tenseurs $\Theta(X, X')$.

LEMME 6. — $\bar{S}^{-1}\Theta_{X, X'}$ ne contient pas de terme scalaire.

En effet, la relation $\Theta(X, X')\Gamma = 0$ est équivalente à $\Theta_{X, X'} + 9\Theta_{X, X'} = 0$ (remarque, 4.3). On applique la remarque, chap. I, 3.3.

On calcule $\Theta(X, X')\gamma^{\lambda}$ en utilisant la relation (10), 2.3:

$$(35) \quad \Theta(X, X')\gamma^{\lambda} = \frac{1}{4} \left((\mathfrak{L}(X)g)_{\mu}^{\lambda} (\mathfrak{L}(X')g)_{\nu}^{\mu} - (\mathfrak{L}(X')g)_{\mu}^{\lambda} (\mathfrak{L}(X)g)_{\nu}^{\mu} \right) \gamma^{\nu}.$$

On définit un $(0, 2)$ tenseur $\tau_{X, X'}$ de composantes $\tau_{\lambda\mu}$ par

$$\Theta(X, X')\gamma_\lambda = 2\tau_{\lambda\mu}\gamma^\mu.$$

On a

$$\begin{aligned}\tau_{\lambda\mu} &= -\frac{1}{4}(\Theta(X, X')\gamma_\lambda\gamma_\mu + \gamma_\mu\Theta(X, X')\gamma_\lambda) = \\ &= \frac{1}{8}\left((\mathfrak{L}(X)g)_{\lambda\nu}(\mathfrak{L}(X')g)_{\mu}^{\nu} - (\mathfrak{L}(X)g)_{\mu\nu}(\mathfrak{L}(X')g)_{\lambda}^{\nu}\right).\end{aligned}$$

Il est clair que $\tau_{X, X'}$ est une 2-forme et l'on a

$$S\tau_{X, X'} = \frac{1}{4}\gamma^\lambda\Theta(X, X')\gamma_\lambda = -\frac{1}{4}\Theta(X, X')\gamma_\lambda\gamma^\lambda.$$

PROPOSITION 10. — Le $(1, 1)$ spineur qui définit la dérivation $\Theta(X, X')$ est

$$\Theta_{X, X'} = S\tau_{X, X'} = \frac{1}{16}\left((\mathfrak{L}(X)g)_{\lambda\nu}(\mathfrak{L}(X')g)_{\mu\varrho} - (\mathfrak{L}(X)g)_{\mu\varrho}(\mathfrak{L}(X')g)_{\lambda\nu}\right)g^{\nu\varrho}\gamma^\lambda\gamma^\mu.$$

Il suffit d'appliquer le lemme 3, 3.3, avec $\varepsilon = -2\tau_{X, X'}$, puis le lemme 6.

PROPOSITION 11. — Les propositions suivantes sont équivalentes:

- (A) La dérivation $\Theta(X, X')$ est nulle;
- (B) Le $(1, 1)$ spineur $\Theta_{X, X'}$ est nul;
- (C) La restriction de la dérivation $\Theta(X, X')$ aux $(1, 1)$ spineurs est nulle;
- (D) $\Theta(X, X')\gamma = 0$.

L'équivalence de (A) et (C) résulte de 1.5 et du lemme 6. L'équivalence de (C) et (D) résulte du lemme 3, 3.3.

5.3. *Cas des transformations infinitésimales conformes.* — Si X est conforme, on obtient à partir de la relation (35), compte tenu de (11), 2.5,

$$\Theta(X, X')\gamma^\lambda = -\frac{1}{2n}\delta X\left(g_\mu^\lambda(\mathfrak{L}(X')g)_{\nu}^{\mu} - (\mathfrak{L}(X')g)_{\mu}^{\lambda}g_{\nu}^{\mu}\right)\gamma^{\nu} = 0.$$

Appliquant la proposition 11, on en déduit que la dérivation $\Theta(X, X')$ est nulle. De même si X' est conforme, puisque $\Theta(X, X')$ est antisymétrique en X et X' . D'où

PROPOSITION 12. — Si X ou X' est conforme, la dérivation $\Theta(X, X')$ est nulle.

COROLLAIRE. — Quel que soit $\varkappa$, $\mathfrak{L}_{\varkappa}$ est un isomorphisme de l'algèbre de LIE des transformations infinitésimales conformes de la variété V sur une sous-algèbre de l'algèbre de LIE des dérivations de l'algèbre des tenseurs-spineurs.

6. — Dérivées des connexions spinorielles.

6.1. *Propriétés de la dérivée de Lie de la connexion riemannienne.* — La connexion riemannienne ω est une 1-forme sur le fibré $\mathcal{O}(V)$ à valeurs dans $\underline{SO}(n, k)$. La dérivée de LIE $\mathfrak{L}(X)\omega$ de ω par un champ de vecteurs X est une 1-forme sur V à valeurs dans $\underline{GL}(n)$. En fait c'est un $(1, 2)$ tenseur et l'on a (A. LICHNEROWICZ [27], chap. II, § 20):

$$(36) \quad (\mathfrak{L}(X)\omega)_{\mu\nu}^{\lambda} = \nabla_{\nu} \nabla_{\mu} X^{\lambda} + X^{\rho} R_{\mu, \rho\nu}^{\lambda}.$$

D'après les identités de RICCI et de BIANCHI, on a

$$(a) \quad (\mathfrak{L}(X)\omega)_{\lambda\mu\nu} = (\mathfrak{L}(X)\omega)_{\lambda\nu\mu},$$

$$(b) \quad (\mathfrak{L}(X)\omega)_{\lambda\mu\nu} + (\mathfrak{L}(X)\omega)_{\mu\lambda\nu} = \nabla_{\nu}(\mathfrak{L}(X)g)_{\lambda\mu}.$$

On en déduit

$$(c) \quad (\mathfrak{L}(X)\omega)_{\lambda\mu\nu} - (\mathfrak{L}(X)\omega)_{\mu\lambda\nu} = \nabla_{\mu}(\mathfrak{L}(X)g)_{\lambda\nu} - \nabla_{\lambda}(\mathfrak{L}(X)g)_{\mu\nu}.$$

D'où

$$(37) \quad (\mathfrak{L}(X)\omega)_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\nabla_{\nu}(\mathfrak{L}(X)g)_{\lambda\mu} + \nabla_{\mu}(\mathfrak{L}(X)g)_{\nu\lambda} - \nabla_{\lambda}(\mathfrak{L}(X)g)_{\mu\nu} \right).$$

De (a) on déduit aussi, le crochet désignant l'antisymétrisation,

$$(38) \quad (\mathfrak{L}(X)\omega)_{[\lambda, \mu, \nu]} = 0.$$

Remarquons que $\mathfrak{L}(X)\omega$ est à valeurs dans $\underline{SO}(n, k)$ si et seulement si $\nabla(\mathfrak{L}(X)g) = 0$.

Cas d'une transformation infinitésimale conforme. — Si X est conforme, compte tenu de la relation $\mathfrak{L}(X)g = -(2/n)\delta Xg$, on a

$$(b') \quad (\mathfrak{L}(X)\omega)_{\lambda\mu\nu} + (\mathfrak{L}(X)\omega)_{\mu\lambda\nu} = -\frac{2}{n} \partial_{\nu}(\delta X)g_{\lambda\mu}$$

$$(c') \quad (\mathfrak{L}(X)\omega)_{\lambda\mu\nu} - (\mathfrak{L}(X)\omega)_{\mu\lambda\nu} = \frac{2}{n} (\partial_{\lambda}(\delta X)g_{\mu\nu} - \partial_{\mu}(\delta X)g_{\lambda\nu})$$

$$(37') \quad (\mathfrak{L}(X)\omega)_{\lambda\mu\nu} = -\frac{1}{n} (\partial_{\nu}(\delta X)g_{\lambda\mu} + \partial_{\mu}(\delta X)g_{\nu\lambda} - \partial_{\lambda}(\delta X)g_{\mu\nu}).$$

RAPPELS. — Une transformation infinitésimale qui laisse invariante la connexion riemannienne ($\mathfrak{L}(X)\omega = 0$) est dite affine.

Une homothétie infinitésimale est une transformation infinitésimale conforme telle que $d(\delta X) = 0$.

Une transformation infinitésimale est conforme et affine si et seulement si c'est une homothétie infinitésimale.

6.2. *Dérivée de Lie d'une connexion spinorielle.* — Soit σ la 1-forme sur le fibré $S(V)$ à valeurs dans $\underline{\text{Spin}}(n, k)$ définissant la connexion spinorielle associée à une connexion métrique ω (chap. I, 2.5). τ désigne l'application $\mathcal{F}(V)$ -linéaire du module des champs de $(1, 1)$ tenseurs dans le module des champs de $(1, 1)$ spineurs définie au chap. II, 2.2. La dérivée de LIE de la connexion spinorielle σ par le champ de vecteurs X est définie par, pour tout Y tangent à V ,

$$(39) \quad (\mathfrak{L}(X)\sigma)(Y) = \tau((\mathfrak{L}(X)\omega)(Y)).$$

$\mathfrak{L}(X)\sigma$ est un champ de $(0, 1)$ tenseurs- $(1, 1)$ spineurs.

Interprétation géométrique. — Soit ζ une section locale de $S(V)$ semi-invariante par X , définie sur $U \subset V$. La connexion spinorielle σ définit sur U une 1-forme σ_ζ à valeurs dans $\underline{\text{Spin}}(n, k)$. Sur U , on a la relation

$$(40) \quad (\mathfrak{L}(X)\sigma)(\zeta) = i(X)d(\sigma_\zeta) + d(i(X)(\sigma_\zeta))$$

qui généralise les résultats de A. LICHNEROWICZ [27], chap. II, § 20.

En effet, en calculant $\mathfrak{L}(X)\omega$ dans les repères orthonormés $\bar{Z} = \bar{\chi}\zeta$, on obtient

$$(41) \quad (\mathfrak{L}(X)\omega)(\bar{Z}) = i(X)d(\omega_{\bar{Z}}) + d(i(X)\omega_{\bar{Z}}) + dB_{\bar{Z}}(X) + [\omega_{\bar{Z}}, B_{\bar{Z}}(X)].$$

Compte tenu de l'antisymétrie des formes de connexion $\omega_{\bar{Z}}$, on a $\alpha([\omega_{\bar{Z}}, B_{\bar{Z}}(X)]) = \alpha(\omega_{\bar{Z}}(\alpha B_{\bar{Z}}(X)))$. Donc, d'après la propriété des sections locales semi-invariantes ((30), chap. II, 3.4),

$$\alpha(dB_{\bar{Z}}(X) + [\omega_{\bar{Z}}, B_{\bar{Z}}(X)]) = 0.$$

En appliquant $\varrho = (\chi')^{-1} \circ \alpha$ à l'expression (41) de $(\mathfrak{L}(X)\omega)(\bar{Z})$, on obtient la relation (40).

Dérivée de Lie de la connexion spinorielle canonique. — Dans la suite, σ désigne la connexion spinorielle canonique associée à la connexion riemannienne ω . Par définition, on a dans tout repère,

$$(\mathfrak{L}(X)\sigma)_\nu = -\frac{1}{8} \left((\mathfrak{L}(X)\omega)_{\lambda\mu\nu} - (\mathfrak{L}(X)\omega)_{\mu\lambda\nu} \right) \gamma^\lambda \gamma^\mu.$$

D'après (c), on peut écrire

$$(42) \quad (\mathfrak{L}(X)\sigma)_\nu = \frac{1}{8} \left(\nabla_\lambda (\mathfrak{L}(X)g)_{\mu\nu} - \nabla_\mu (\mathfrak{L}(X)g)_{\lambda\nu} \right) \gamma^\lambda \gamma^\mu.$$

En utilisant la relation (36), on obtient

$$(43) \quad (\mathfrak{L}(X)\sigma)_\nu = -\frac{1}{4} (X^\varrho R_{\lambda\mu, \varrho\nu} + \frac{1}{2} \nabla_\nu (\nabla_\mu X_\lambda - \nabla_\lambda X_\mu)) \gamma^\lambda \gamma^\mu.$$

Soit, en introduisant le tenseur-spineur de courbure (chap. I, 2.7),

$$(\mathfrak{L}(X)\sigma)_{vj}^i = X^e H_{j, ev}^i - \frac{1}{8} \nabla_v (\nabla_\mu X_\lambda - \nabla_\lambda X_\mu) (\gamma^\lambda \gamma^\mu)^i_j.$$

Cas d'une transformation infinitésimale conforme. — La relation (42) compte tenu de (c') s'écrit

$$\begin{aligned} (42') \quad (\mathfrak{L}(X)\sigma)_v &= -\frac{1}{4n} (\partial_\lambda(\delta X) g_{\mu v} - \partial_\mu(\delta X) g_{\lambda v}) \gamma^\lambda \gamma^\mu \\ &= -\frac{1}{4n} \partial_\lambda(\delta X) (\gamma^\lambda \gamma_v - \gamma_v \gamma^\lambda). \end{aligned}$$

6.3. Commutation de la dérivation de Lie avec la dérivation covariante. — On reprend la notation $\underline{\mathcal{R}}_{as}^{pr}$ introduite en 2.1.

PROPOSITION 13. — Pour tout champ ψ de $(1, 0)$ spineurs,

$$(44) \quad \mathfrak{L}(X) \nabla \psi - \nabla \mathfrak{L}(X) \psi = (\mathfrak{L}(X) \sigma) \psi.$$

Plus généralement, pour tout champ ψ de (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs,

$$(45) \quad \mathfrak{L}(X) \nabla \psi - \nabla \mathfrak{L}(X) \psi = \underline{\mathcal{R}}_{as}^{pr}(\mathfrak{L}(X) \omega, \mathfrak{L}(X) \sigma) \psi.$$

Pour démontrer (44), considérons

$$\mathfrak{L}(X) \nabla_v \psi - \nabla_v \mathfrak{L}(X) \psi = X^e (\nabla_e \nabla_v - \nabla_v \nabla_e) \psi + \nabla_v (\tau(\nabla X)) \psi.$$

Compte tenu de $\nabla \gamma = 0$ et de l'identité de RICCI, on voit que

$$\mathfrak{L}(X) \nabla_v \psi - \nabla_v \mathfrak{L}(X) \psi = -\frac{1}{4} (X^e R_{\lambda\mu, ev} - \frac{1}{2} \nabla_v (\nabla_\lambda \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\lambda)) \gamma^\lambda \gamma^\mu \psi,$$

d'où (44) d'après (43).

La relation (45) se déduit de (44) d'après la définition même de la dérivation de LIE des (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs. On peut aussi la démontrer directement par l'identité de RICCI générale.

REMARQUE. — On montre facilement que l'application

$$\mathfrak{L}(X) \nabla - \nabla \mathfrak{L}(X): \psi \in \underline{S(V)} \rightarrow \mathfrak{L}(X) \nabla \psi - \nabla \mathfrak{L}(X) \psi \in \underline{\mathfrak{G}^*(V) \otimes S(V)}$$

est $\mathcal{F}(V)$ -linéaire. On en déduit qu'il existe un champ de $(0, 1)$ tenseurs- $(1, 1)$ spineurs unique, noté $\mathfrak{L}(X)\sigma$, tel que l'on ait (44). On aurait pu prendre cette relation pour définition de $\mathfrak{L}(X)\sigma$.

CONSÉQUENCE. — Appliquons la relation (45) au $(0, 2)$ spineur fondamental I . D'après 4.3, on a d'une part $\mathfrak{L}(X)I = 0$ (relation (32)); d'autre part, $(\mathfrak{L}(X)\sigma)I + I(\mathfrak{L}(X)\sigma) = 0$ puisque $\mathfrak{L}(X)\sigma$ est une 1-forme à valeurs dans les $(1, 1)$ spineurs homogènes de degré 2. D'où, pour tout champ de vecteurs X , on vérifie que

$$\mathfrak{L}(X)\nabla I = 0.$$

6.4. *Cas d'une dérivation quelconque.* — On considère une dérivation $\mathcal{M}(X)$ prolongeant la dérivation de LIE des tenseurs, définie par le $(1, 1)$ spineur λ_X . On aura, pour tout champ ψ de $(1, 0)$ spineurs,

$$\mathcal{M}(X)\nabla\psi - \nabla\mathcal{M}(X)\psi = \mathfrak{L}(X)\nabla\psi - \nabla\mathfrak{L}(X)\psi - (\nabla\lambda_X)\psi = (\mathfrak{L}(X)\sigma - \nabla\lambda_X)\psi.$$

On a donc

$$(46) \quad \mathcal{M}(X)\sigma = \mathfrak{L}(X)\sigma - \nabla\lambda_X.$$

En particulier, pour les dérivations $\mathfrak{L}_\kappa(X)$ ($\lambda_X = \kappa\delta X$, $\kappa \in \mathbf{R}$), on a

$$\mathfrak{L}_\kappa(X)\sigma = \mathfrak{L}(X)\sigma - \kappa d\delta X.$$

Dans la note [23] (Y. KOSMANN), la dérivation utilisée est $\mathfrak{L}_{\frac{1}{4}}(\kappa = \frac{1}{4})$, pour laquelle on a

$$(\mathfrak{L}_{\frac{1}{4}}(X)\sigma)_\nu = -\frac{1}{4}(\mathfrak{L}(X)\omega)_{\lambda\mu\nu}\gamma^\lambda\gamma^\mu.$$

La relation générale (45) est encore valable quand on y remplace la dérivation de LIE $\mathfrak{L}(X)$ par une dérivation $\mathcal{M}(X)$ quelconque.

6.5. *Champs de vecteurs laissant invariante une connexion spinorielle.* — La définition (39), 6.2, donne aussitôt

PROPOSITION 14. — Le champ de vecteurs X laisse invariante la connexion spinorielle σ si et seulement si $\mathfrak{L}(X)\omega$ est une 1-forme à valeurs dans le module des $(1, 1)$ tenseurs symétriques relativement à g . En particulier, toute transformation infinitésimale qui laisse invariante la connexion métrique ω laisse invariante la connexion spinorielle σ .

σ désignant la connexion spinorielle canonique et ω la connexion riemannienne de V , on obtient en rapprochant ce résultat de la relation (b), 6.1,

PROPOSITION 15. — Le champ de vecteurs X est une transformation infinitésimale affine si et seulement si $\mathfrak{L}(X)\sigma = 0$ et $\nabla(\mathfrak{L}(X)g) = 0$.

Ces résultats seront complétés par la proposition 16, 6.6.

6.6. Calcul de $(\mathfrak{L}(X)\sigma)_v\gamma^\nu$. — Appliquons la relation (45), 6.3, au $(1, 0)$ tenseur- $(1, 1)$ spineur fondamental γ , en tenant compte de $\nabla\gamma = 0$,

$$-\nabla_v(\mathfrak{L}(X)\gamma)^\lambda = (\mathfrak{L}(X)\omega)^\lambda_{\mu\nu}\gamma^\mu + (\mathfrak{L}(X)\sigma)_v\gamma^\lambda - \gamma^\lambda(\mathfrak{L}(X)\sigma)_v.$$

Utilisant les relations (10), 2.5, et (37), 6.1, on obtient

$$(\mathfrak{L}(X)\sigma)_v\gamma^\lambda - \gamma^\lambda(\mathfrak{L}(X)\sigma)_v = \frac{1}{2}(\nabla^\lambda(\mathfrak{L}(X)g)_{\mu\nu} - \nabla_\mu(\mathfrak{L}(X)g)^\lambda_\nu)\gamma^\mu.$$

En particulier,

$$(47) \quad (\mathfrak{L}(X)\sigma)_v\gamma^\nu - \gamma^\nu(\mathfrak{L}(X)\sigma)_v = \left(\frac{1}{2}\nabla_v(\mathfrak{L}(X)g)_\mu^\nu + \partial_\mu(\delta X)\right)\gamma^\mu = \delta(\mathfrak{L}(X)\gamma - \delta X\gamma)$$

en notant $\delta(\delta X)\gamma$, $\delta(\mathfrak{L}(X)\gamma)$ les $(1, 1)$ spineurs $-\nabla_\lambda(\delta X)\gamma^\lambda$, $-\nabla_\lambda(\mathfrak{L}(X)\gamma)^\lambda$.

Posons $(\mathfrak{L}(X)\sigma)_v = A_{\lambda\mu\nu}\gamma^\lambda\gamma^\mu$, avec

$$A_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{6}(\nabla_\lambda(\mathfrak{L}(X)g)_{\mu\nu} - \nabla_\mu(\mathfrak{L}(X)g)_{\lambda\nu}).$$

De (38), 6.1, on déduit $A_{[\lambda,\mu,\nu]} = 0$. On a $A_{\lambda\mu\nu} = -A_{\mu\lambda\nu}$, donc $A_{\lambda\mu\nu}g^{\lambda\mu} = 0$. D'où

$$(\mathfrak{L}(X)\sigma)_v\gamma^\nu = A_{\lambda\mu\nu}\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu = 2A_{v\lambda\mu}g^{\mu\nu}\gamma^\lambda.$$

Compte tenu de l'expression de $A_{\lambda\mu\nu}$ et de la relation $(\mathfrak{L}(X)g)_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = -2\delta X$, on a donc

$$(48) \quad (\mathfrak{L}(X)\sigma)_v\gamma^\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\nabla_v(\mathfrak{L}(X)g)_\mu^\nu + \partial_\mu(\delta X)\right)\gamma^\mu = \frac{1}{2}\delta(\mathfrak{L}(X)\gamma - \delta X\gamma).$$

En comparant les relations (47) et (48), on voit que

$$(49) \quad (\mathfrak{L}(X)\sigma)_v\gamma^\nu + \gamma^\nu(\mathfrak{L}(X)\sigma)_v = 0.$$

$$(50) \quad \gamma^\nu(\mathfrak{L}(X)\sigma)_v = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\nabla_v(\mathfrak{L}(X)g)_\mu^\nu + \partial_\mu(\delta X)\right)\gamma^\mu = -\frac{1}{2}\delta(\mathfrak{L}(X)\gamma - \delta X\gamma).$$

LEMME 7. — Le champ de vecteurs X laisse invariante la connexion spinorielle canonique σ si et seulement si $\forall \mu = 1, 2, \dots, n$,

$$(51) \quad \gamma^\lambda(\mathfrak{L}(X)\sigma)_\lambda\gamma^\mu - \gamma^\lambda\gamma^\mu(\mathfrak{L}(X)\sigma)_\lambda = 0.$$

En effet, on a $\gamma^\lambda\gamma^\mu(\mathfrak{L}(X)\sigma)_\lambda\gamma_\mu = (n-4)(\mathfrak{L}(X)\sigma)_\lambda\gamma^\lambda$. Posant $(\mathfrak{L}(X)\sigma)_v\gamma^\nu = H_\lambda\gamma^\lambda = -\gamma^\nu(\mathfrak{L}(X)\sigma)_v$, on trouve

$$\gamma^\lambda(\mathfrak{L}(X)\sigma)_\lambda\gamma^\mu - \gamma^\lambda\gamma^\mu(\mathfrak{L}(X)\sigma)_\lambda = 2H^\mu + 2(\mathfrak{L}(X)\sigma)^\mu.$$

La condition (51) entraîne $(\mathfrak{L}(X)\sigma)_\mu = -H_\mu$, donc $\mathfrak{L}(X)\sigma = 0$, puisque $\mathfrak{L}(X)\sigma$ est une 1-forme à valeurs dans les $(1, 1)$ spineurs de degré 2.

Cas d'une transformation infinitésimale conforme. — On a alors, d'après (11), 2.5,

$$(52) \quad (\mathfrak{L}(X)\sigma)_\nu \gamma^\nu = \frac{n-1}{2n} \partial_\lambda(\delta X) \gamma^\lambda,$$

$$(53) \quad \gamma^\nu (\mathfrak{L}(X)\sigma)_\nu = -\frac{n-1}{2n} \partial_\lambda(\delta X) \gamma^\lambda.$$

PROPOSITION 16. — Toute transformation infinitésimale conforme qui laisse invariante la connexion spinorielle canonique est une homothétie infinitésimale.

Expression à l'aide du laplacien et de l'opérateur de Ricci. — On revient au cas où le champ de vecteurs X est quelconque. On introduit le tenseur de RICCI $R_{\alpha\beta}$ de la variété riemannienne ou pseudo-riemannienne V , le laplacien sur les formes $\Delta = d\delta + \delta d$ qui vérifie $(\Delta X)_\alpha = -\nabla^\beta \nabla_\beta X_\alpha + R_{\alpha\beta} X^\beta$ et l'opérateur de RICCI sur les champs de vecteurs défini par $(QX)_\alpha = 2R_{\alpha\beta} X^\beta$. On a (A. LICHNEROWICZ [27], chap. V, § 77)

$$\nabla_\nu (\mathfrak{L}(X)g)_\lambda^\nu = (QX - \Delta X - d\delta X)_\lambda.$$

D'où

$$(\mathfrak{L}(X)\sigma)_\nu \gamma^\nu = -\gamma^\nu (\mathfrak{L}(X)\sigma)_\nu = \frac{1}{4}(QX - \Delta X + d\delta X)_\lambda \gamma^\lambda.$$

Donc pour que $\gamma^\nu (\mathfrak{L}(X)\sigma)_\nu = 0$ il faut et il suffit que $QX - \Delta X + d\delta X = 0$.

Supposons la variété V riemannienne et compacte. Des résultats de A. LICHNEROWICZ [27], chap. V, § 78, on déduit

PROPOSITION 17. — Soit V une variété spinorielle, riemannienne et compacte. Le champ de vecteurs X sur V est une isométrie infinitésimale si et seulement si $d\delta X = 0$ et $\gamma^\nu (\mathfrak{L}(X)\sigma)_\nu = 0$. En particulier, tout champ de vecteurs sur V à divergence constante qui laisse invariante la connexion spinorielle canonique est une isométrie infinitésimale.

Cas d'une dérivation quelconque. — D'après 6.4, pour une dérivation $\mathcal{M}(X)$ définie par le (1,1)spineur λ_X , on a

$$(\mathcal{M}(X)\sigma)_\nu \gamma^\nu + \gamma^\nu (\mathcal{M}(X)\sigma)_\nu = -(\nabla_\nu \lambda_X \gamma^\nu + \gamma^\nu \nabla_\nu \lambda_X).$$

Considérons en particulier les dérivations $\mathfrak{L}_\kappa(X)$; on a

$$(\mathfrak{L}_\kappa(X)\sigma)_\nu \gamma^\nu + \gamma^\nu (\mathfrak{L}_\kappa(X)\sigma)_\nu = -2\kappa \partial_\nu(\delta X) \gamma^\nu.$$

Si κ est différent de 0, on perd la symétrie des résultats:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{L}_\kappa(X)\sigma)_\nu \gamma^\nu &= \left(\frac{1}{4} \nabla_\nu (\mathfrak{L}(X)g)_\lambda^\nu + \left(\frac{1}{2} - \kappa \right) \partial_\lambda(\delta X) \right) \gamma^\lambda, \\ \gamma^\nu (\mathfrak{L}_\kappa(X)\sigma)_\nu &= - \left(\frac{1}{4} \nabla_\nu (\mathfrak{L}(X)g)_\lambda^\nu + \left(\frac{1}{2} + \kappa \right) \partial_\lambda(\delta X) \right) \gamma^\lambda. \end{aligned}$$

Si X est une transformation infinitésimale conforme, alors

$$(\mathbb{L}_\kappa(X)\sigma)_v \gamma^v = \left(\frac{n-1}{2n} + \kappa \right) \partial_\lambda(\delta X) \gamma^\lambda,$$

$$\gamma^v (\mathbb{L}_\kappa(X)\sigma)_v = - \left(\frac{n-1}{2n} + \kappa \right) \partial_\lambda(\delta X) \gamma^\lambda.$$

Ces calculs seront utilisés au chap. V.

CHAPITRE IV

OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS ET ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Dans ce chapitre, on applique aux variétés spinorielles les définitions classiques concernant les opérateurs différentiels. Sur une variété V de classe C^∞ (que l'on ne suppose pas nécessairement riemannienne ni pseudo-riemannienne) l'invariance d'un opérateur différentiel sur les tenseurs par une transformation μ de V se définit facilement, puisqu'une telle transformation « agit » sur les champs de tenseurs par l'automorphisme μ^* . Pour étendre cette notion au cas d'un opérateur différentiel sur les tenseurs-spineurs sur une variété spinorielle, on définit la notion d'invariance par un champ de vecteurs X , grâce aux isomorphismes $\exp(tX)^*$ définis au chap. III, 2.3; dans le cas des tenseurs, la définition coïncide avec la notion d'invariance par le groupe local à un paramètre μ_t de transformations locales de V engendré par le champ de vecteurs X , puisque les restrictions aux tenseurs des isomorphismes $\exp(tX)^*$ sont les isomorphismes induits par les transformations locales de V , $\exp(tX) = \mu_t$. Si l'on suppose seulement V de classe C^p , $p \geq 2$, on ne considère que des opérateurs différentiels d'ordre $m \leq p-1$.

1. — Invariance des opérateurs différentiels.

1.1. Opérateurs différentiels sur les tenseurs-spineurs. — La définition des opérateurs différentiels linéaires (R. S. PALAIS [35], chap. IV) s'applique aux fibrés sur une variété spinorielle V de classe C^∞ et paracompacte. On peut donc considérer des opérateurs différentiels sur le fibré ${}^{p,r}_q(V)$ des (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs à valeurs dans le fibré ${}^{p',r'}_{q'}(V)$ des (p', q') tenseurs- (r', s') spineurs.

Si (x^α) est un système de coordonnées locales sur un ouvert Ω de V et si l'on a choisi sur Ω une section locale du fibré des repères spinoriels, à un champ ψ de

(p, q) tenseurs- (r, s) spineurs de classe C^∞ est associée une fonction de classe C^∞ sur Ω à valeurs dans $E^{pqrs} = (\bigotimes^p C^n) \otimes (\bigotimes^q (C^n)^*) \otimes (\bigotimes^r C^{2^v}) \otimes (\bigotimes^s (C^{2^v})^*)$, notée encore ψ . On désigne par (i) le multi-indice $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in N^n$ et l'on pose $|i| = \sum_{\alpha=1}^n i_\alpha$. Si $x \in \Omega$, on pose

$$\partial_{(i)} \psi(x^\alpha) = \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)^{i_1} \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right)^{i_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)^{i_n} \psi(x^1, x^2, \dots, x^n).$$

Un opérateur différentiel D d'ordre m sur ${}^{p,r}_a(V)$ à valeurs dans ${}^{p',r'}_{a'}(V)$ est une application linéaire de l'espace vectoriel des champs de (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs dans l'espace vectoriel des champs de (p', q') tenseurs- (r', s') spineurs telle que, pour tout ouvert connexe Ω de coordonnées locales (x^α) , il existe des champs $A^{(i)}$ de classe C^∞ sur Ω d'applications linéaires de E^{pqrs} dans $E^{p'q'r's'}$ vérifiant, pour tout champ ψ de (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs,

$$(1) \quad \forall x \in \Omega, \quad (D\psi)(x^\alpha) = \sum_{0 \leq |i| \leq m} A^{(i)}(x^\alpha) \partial_{(i)} \psi(x^\alpha).$$

Cette propriété (R. S. PALAIS [35], chap. IV, § 3, th. 3) généralise les propriétés des opérateurs différentiels sur les fonctions (A. LICHNEROWICZ [32]).

EXEMPLE. — Toute dérivation de l'algèbre des champs de tenseurs-spineurs est un opérateur différentiel d'ordre 1 sur le fibré des tenseurs-spineurs de type quelconque.

Opérateurs différentiels non homogènes. — Un opérateur différentiel non homogène D_a sur ${}^{p,r}_a(V)$ à valeurs dans ${}^{p',r'}_{a'}(V)$ est défini par un opérateur différentiel D sur ${}^{p,r}_a(V)$ à valeurs dans ${}^{p',r'}_{a'}(V)$ et un champ a de (p', q') tenseurs- (r', s') spineurs, avec, pour tout champ ψ de (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs,

$$(2) \quad D_a \psi = D\psi + a.$$

1.2. *Invariance d'un opérateur différentiel sur les tenseurs par un difféomorphisme de V .* — Soit μ un difféomorphisme de V . On notera μ^* l'automorphisme de l'algèbre des champs de tenseurs sur V induit par μ . Soit D un opérateur différentiel sur le fibré des (p, q) tenseurs à valeurs dans le fibré des (p', q') tenseurs.

DÉFINITION 1. — L'opérateur différentiel D est invariant par le difféomorphisme μ si, pour tout champ ψ de (p, q) tenseurs,

$$\mu^*(D\psi) = D(\mu^*\psi),$$

c'est-à-dire

$$(3) \quad \forall x \in V, \quad \mu^*(D\psi)_{\mu x} = D(\mu^*\psi_{\mu x}).$$

1.3. *Invariance d'un opérateur différentiel sur les tenseurs par un groupe à un paramètre de difféomorphismes de V .* — Soit μ_t ($t \in \mathbf{R}$) un groupe à un paramètre de difféomorphismes de V . Par définition, l'opérateur différentiel D est invariant par le groupe à un paramètre μ_t de difféomorphismes de V si, pour tout champ ψ de (p, q) tenseurs,

$$(4) \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in V, \quad \mu_t^*(D\psi)_{\mu_{tx}} = D(\mu_t^* \psi_{\mu_{tx}}).$$

Formule de Taylor généralisée. — Soit X le générateur infinitésimal du groupe à un paramètre μ_t . On a

$$(5) \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in V, \quad \frac{d}{dt} (\mu_t^* \psi_{\mu_{tx}}) = \mu_t^* (\mathcal{L}(X) \psi)_{\mu_{tx}}.$$

$\mathcal{L}^i(X)$ étant défini par récurrence, on en déduit,

$$\forall i \in \mathbf{N}, \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in V, \quad \left(\frac{d}{dt} \right)^i (\mu_t^* \psi_{\mu_{tx}}) = \mu_t^* (\mathcal{L}^i(X) \psi)_{\mu_{tx}}.$$

Si l'on suppose que la variété V est analytique et que les champs X et ψ sont analytiques, alors, pour tout $x \in V$, il existe un voisinage I_x de 0 dans $\mathbf{R}$ tel que

$$(6) \quad \forall t \in I_x, \quad \mu_t^* \psi_{\mu_{tx}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} (\mathcal{L}^i(X) \psi)_x.$$

Pour une formule de TAYLOR avec reste intégral dans le cas d'une variété de classe C^∞ , voir R. S. PALAIS [34].

PROPOSITION 1. — L'opérateur différentiel D est invariant par le groupe à un paramètre μ_t de difféomorphismes de V si et seulement s'il commute avec la dérivation de LIE par le champ de vecteurs X , générateur infinitésimal du groupe à un paramètre μ_t .

La condition est nécessaire: soit ψ un champ de (p, q) tenseurs. Posons,

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in V, \quad \varphi_t(x) = \frac{\mu_t^* \psi_{\mu_{tx}} - \psi_x}{t} - (\mathcal{L}(X) \psi)_x.$$

Par définition de la dérivée de LIE de ψ au point x ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_t(x) = 0.$$

De la relation

$$\partial_{(a)} \varphi_t(x) = \frac{\mu_t^* \partial_{(a)} \psi_{\mu_{tx}} - \partial_{(a)} \psi_x}{t} - (\mathcal{L}(X) \partial_{(a)} \psi)_x,$$

on déduit de même $\lim_{t \rightarrow 0} \partial_{(i)} \varphi_t(x) = 0$. De l'expression (1), 1.1, de l'opérateur différentiel D , on déduit $\lim_{t \rightarrow 0} D\varphi_t(x) = 0$, soit

$$(7) \quad \lim_{t \rightarrow 0} D(\mu_t^* \psi_{\mu_t x}) = (D\psi)_x = (D\mathfrak{L}(X)\psi)_x = 0.$$

Soit, d'après l'hypothèse d'invariance de D ,

$$(\mathfrak{L}(X) D\psi)_x = (D\mathfrak{L}(X)\psi)_x = 0.$$

La condition est suffisante: soit x un point de V et (y^α) des coordonnées locales sur un voisinage ouvert connexe de x , Ω_x . Soit ψ un champ de (p, q) tenseurs. Dans ces coordonnées, $D\psi$ s'écrit selon (1), 1.1,

$$(D\psi)(y^\alpha) = \sum_{0 \leq |i| \leq m} A^{(i)}(y^\alpha) \partial_{(i)} \psi(y^\alpha)$$

et les $A^{(i)}(y^\alpha)$ définissent des champs de tenseurs $A^{(i)}$ sur Ω_x . En tout point de Ω_x , on a

$$\mathfrak{L}(X) D\psi = D\mathfrak{L}(X)\psi = \sum_{0 \leq |i| \leq m} (\mathfrak{L}(X) A^{(i)}) \partial_{(i)} \psi.$$

Done, d'après l'hypothèse, en tout point de Ω_x ,

$$\forall (i) \in N^n, \quad \mathfrak{L}(X) A^{(i)} = 0.$$

D'après la relation (5) cette propriété est équivalente à

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \mu_t x \in \Omega_x, \quad \mu_t^* A_{\mu_t x}^{(i)} - A_x^{(i)} = 0.$$

D'où, $\forall t \in \mathbf{R}$, $\mu_t x \in \Omega_x$,

$$\mu_t^* (D\psi)_{\mu_t x} - D(\mu_t^* \psi_{\mu_t x}) = \sum_{0 \leq |i| \leq m} (\mu_t^* A_{\mu_t x}^{(i)} - A_x^{(i)}) \mu_t^* (\partial_{(i)} \psi)_{\mu_t x} = 0.$$

Or l'ensemble des $t \in \mathbf{R}$ tels que $\mu_t x \in \Omega_x$ est un ouvert contenant 0. On en déduit que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \mu_t^* (D\psi)_{\mu_t x} = D(\mu_t^* \psi_{\mu_t x}).$$

1.4. Invariance d'un opérateur différentiel sur les tenseurs par un groupe de Lie de difféomorphismes de V . — Soit G un groupe de LIE de difféomorphismes de V . Les champs de vecteurs de KILLING relatifs au groupe de LIE G sont par définition les

générateurs infinitésimaux des sous-groupes à un paramètre de difféomorphismes de G (A. LICHNEROWICZ [27], chap. III, § 23 et Y. CHOQUET-BRUHAT [12], chap. IV, § 11).

PROPOSITION 2. — Pour que l'opérateur différentiel D soit invariant par G , groupe de LIE connexe de difféomorphismes de V , il faut et il suffit qu'il commute avec la dérivation de LIE par les champs de vecteurs de KILLING relatifs au groupe de LIE G .

En effet, il existe un voisinage de l'identité dans G tel que tout point de ce voisinage soit sur un sous-groupe à un paramètre de G . D'autre part, étant donné un voisinage de l'identité dans G , tout élément de la composante connexe de l'identité dans G est le produit d'un nombre fini d'éléments de ce voisinage. Donc D est invariant par G connexe si et seulement si D est invariant par les sous-groupes à un paramètre de G . D'où la proposition 2 compte tenu de la proposition 1.

1.5. *Invariance d'un opérateur différentiel sur les tenseurs-spineurs par un champ de vecteurs.* — Soit X un champ de vecteur sur V et μ_t le groupe local à un paramètre de difféomorphismes locaux de V engendré par X , $\mu_t x = \exp(tX)x = x(t)$. Etant donné x dans V , il existe un voisinage ouvert connexe de x , Ω_x , et un voisinage I_x de 0 dans $\mathbf{R}$ tels que pour tout $t \in I_x$, μ_t soit un difféomorphisme de Ω_x sur $\mu_t \Omega_x$ et $\exp(tX)^*$ soit un isomorphisme de l'algèbre des champs de tenseurs-spineurs sur U_x (intersection de Ω_x et de la trajectoire de X passant par x) sur l'algèbre des champs de tenseurs-spineurs sur $\mu_t U_x$ (chap. III, 2.3). La restriction de $\exp(tX)^*$ aux champs de tenseurs est l'isomorphisme μ_t^* induit par le difféomorphisme local μ_t et restreint à U_x .

Soit D un opérateur différentiel sur le fibré des (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs à valeurs dans le fibré des (p', q') tenseurs- (r', s') spineurs.

DÉFINITION 2. — L'opérateur différentiel D est invariant par le champ de vecteurs X en un point x de V s'il existe un voisinage $I'_x \subset I_x$ de 0 dans $\mathbf{R}$ tel que, pour tout champ ψ de (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs,

$$\forall t \in I'_x, \quad \exp(tX)_x^*(D\psi)_{\mu_t x} = D(\exp(tX)_x^* \psi_{\mu_t x}).$$

On dit que D est invariant par le champ de vecteurs X s'il est invariant par X en tout point de V .

PROPOSITION 3. — L'opérateur différentiel D est invariant par le champ de vecteurs X en un point x de V si et seulement s'il existe un voisinage $I'_x \subset I_x$ de 0 dans $\mathbf{R}$ tel que, pour tout champ ψ de (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs,

$$\forall t \in I'_x, \quad (\mathcal{L}(X)D\psi)_{\mu_t x} = (D\mathcal{L}(X)\psi)_{\mu_t x}.$$

Pour que l'opérateur différentiel D soit invariant par le champ de vecteurs X , il faut et il suffit qu'il commute avec la dérivation de LIE par le champ de vecteurs X .

En effet, la relation (5), 1.3, s'étend immédiatement au cas d'un groupe local à un paramètre de difféomorphismes locaux: elle est alors valable seulement quand t , x et $\mu_t x$ appartiennent aux domaines de définition dans $\mathbf{R}$ et V respectivement. Sous cette forme elle est valable aussi pour un champ ψ de (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs (chap. III, 2.3). La démonstration de la prop. 1, 1.3, s'applique alors, les $A^{(t)}$ étant des champs de tenseurs-spineurs.

PROPOSITION 4. — On suppose que le champ de vecteurs X engendre un groupe (global) à un paramètre de difféomorphismes (globaux) de V , μ_t ($t \in \mathbf{R}$) et l'on considère un opérateur différentiel D sur les tenseurs. L'opérateur différentiel D est invariant par le champ de vecteurs X si et seulement s'il est invariant par le groupe à un paramètre μ_t de difféomorphismes de V .

Il suffit de remarquer que, dans le cas des tenseurs, $\exp(tX)^*$ coïncide avec μ_t^* et que, si les difféomorphismes μ_t forment un groupe (global) à un paramètre, la condition

$$\forall x \in V, \quad \forall t \in I'_x, \quad \mu_t^*(D\psi)_{\mu_t x} = D(\mu_t^* \psi_{\mu_t x})$$

implique (4), 1.3.

DÉFINITION 3. — Si un opérateur différentiel D sur les tenseurs-spineurs est invariant par les champs de vecteurs de KILLING relatifs à un groupe de LIE connexe G de difféomorphismes de V , on dira que l'opérateur différentiel D est invariant par le groupe G .

Cette définition est justifiée par la prop. 4 et la prop. 2, 1.4. Elle étend aux opérateurs différentiels sur les spineurs la notion d'invariance par un groupe de LIE connexe de difféomorphismes de V .

1.6. *Cas des opérateurs différentiels non homogènes.* — On étend aux opérateurs différentiels non homogènes la définition 1, 1.2, et la définition 2, 1.5.

Un opérateur différentiel non homogène sur les tenseurs D_a est invariant par le difféomorphisme μ si et seulement si l'opérateur différentiel D et le champ de tenseurs a sont invariants par μ .

Un opérateur différentiel non homogène sur les tenseurs-spineurs D_a est invariant par le champ de vecteurs X si et seulement si l'opérateur différentiel D et le champ de tenseurs-spineurs a sont invariants par X .

Les propositions 1 à 4 se généralisent au cas des opérateurs différentiels non homogènes. On étend la définition 3.

1.7. *Cas des variétés analytiques.* — Soit V une variété spinorielle analytique, X un champ de vecteurs analytique sur V et D un opérateur différentiel sur les champs de (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs analytiques. L'opérateur différentiel D est invariant par le champ de vecteurs X si et seulement si, pour tout champ ψ de (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs analytique, $\mathfrak{L}(X)D\psi = D\mathfrak{L}(X)\psi$.

Pour démontrer que la condition est suffisante, on peut utiliser la formule de TAYLOR généralisée ((6), 1.3, et chap. III, 2.3). De l'hypothèse $\mathfrak{L}(X)D\psi = D\mathfrak{L}(X)\psi$, on déduit

$$\forall i \in \mathbf{N}, \quad \mathfrak{L}^i(X)D\psi = D\mathfrak{L}^i(X)\psi,$$

done, pour tout x dans V , il existe un voisinage I_x de 0 dans $\mathbf{R}$ tel que

$$\forall t \in I_x, \quad \mu_t^*(D\psi)_{\mu_t x} = \lim_{j \rightarrow \infty} D \sum_{i=0}^j \frac{t^i}{i!} (\mathfrak{L}^i(X)\psi)_x.$$

On en déduit $\forall t \in I_x, \mu_t^*(D\psi)_{\mu_t x} = D(\mu_t^* \psi)_{\mu_t x}$.

2. – Invariance des équations aux dérivées partielles.

2.1. Equations équivalentes. – Une équation aux dérivées partielles linéaire (D) d'ordre m sur le fibré ${}^p_r {}^q_s(V)$ des (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs à valeurs dans le fibré ${}^{p'}_{q'} {}^{r'}_{s'}(V)$ est définie par un opérateur différentiel D d'ordre m sur ${}^p_r {}^q_s(V)$ à valeurs dans ${}^{p'}_{q'} {}^{r'}_{s'}(V)$. Les solutions locales de (D) sont les champs ψ de (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs définis sur un ouvert $\mathcal{O}$ de V tels que $D\psi = 0$ sur $\mathcal{O}$.

DÉFINITION 4. – Deux équations sur ${}^p_r {}^q_s(V)$ à valeurs dans ${}^{p'}_{q'} {}^{r'}_{s'}(V)$, $(D^{(1)})$ et $(D^{(2)})$, sont dites *fortement équivalentes* si, pour tout point x de V , il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}_x$ de x et un automorphisme H du fibré des (p', q') tenseurs- (r', s') spineurs au-dessus de $\mathcal{O}_x$ tel que, pour tout champ ψ de (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs sur $\mathcal{O}_x$,

$$(8) \quad \forall y \in \mathcal{O}_x, \quad (D^{(2)}\psi)_y = H_y(D^{(1)}\psi)_y.$$

On sait que deux équations sur ${}^p_r {}^q_s(V)$ à valeurs dans ${}^{p'}_{q'} {}^{r'}_{s'}(V)$ sont dites équivalentes si elles sont de même ordre et si elles ont les mêmes solutions locales. Il résulte immédiatement de la définition 4 que, si deux équations sont fortement équivalentes, elles sont équivalentes. La recherche d'une réciproque semble intéressante; on construit une application linéaire bijective H de l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ des champs de (p', q') tenseurs- (r', s') spineurs sur un ouvert de V dans lui-même telle que $D^{(2)} = HD^{(1)}$; on cherche des conditions suffisantes pour que H soit un morphisme de fibré; on est amené à faire des hypothèses supplémentaires: équations elliptiques, équations formellement intégrables (au sens de QUILLEN).

Equations aux dérivées partielles non homogènes. – Un opérateur différentiel non homogène D_a définit une équation aux dérivées partielles non homogène (D_a) . Deux équations aux dérivées partielles non homogènes, $(D_{a_1}^{(1)})$ et $(D_{a_2}^{(2)})$, sont dites fortement équivalentes si les équations homogènes $(D^{(1)})$ et $(D^{(2)})$ sont fortement équivalentes et $\forall y \in \mathcal{O}_x, a_2(y) = H_y a_1(y)$.

L'équivalence forte entraîne l'équivalence. Inversement, supposons que $(D_{a_1}^{(1)})$ et $(D_{a_2}^{(2)})$ sont équivalentes, $(D^{(1)})$ et $(D^{(2)})$ sont fortement équivalentes, et $(D_{a_1}^{(1)})$ et $(D_{a_1}^{(2)})$ ont des solutions locales au voisinage de tout point de V ; alors $(D_{a_1}^{(1)})$ et $(D_{a_2}^{(2)})$ sont fortement équivalentes.

Systèmes d'équations aux dérivées partielles. — Un système d'équations aux dérivées partielles sur le fibré ${}^{pr}_{qs}(V)$ des (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs est défini par un opérateur différentiel D sur ${}^{pr}_{qs}(V)$ à valeurs dans un fibré ξ' , somme directe de i fibrés (ξ_A) , $A = 1, 2, \dots, i$, chaque ξ_A étant le fibré des tenseurs-spineurs d'un certain type sur V . Les définitions ci-dessus s'étendent immédiatement au cas des systèmes d'équations aux dérivées partielles, H étant un automorphisme de la restriction à $\mathcal{O}_x$ du fibré ξ' . De même, les définitions et les résultats de toute la fin de ce chapitre sont valables pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles, à condition de considérer dans chaque cas des endomorphismes du fibré ξ' .

2.2. Invariance d'une équation aux dérivées partielles sur les tenseurs par un difféomorphisme de V . — Soit (D) une équation aux dérivées partielles sur le fibré des (p, q) tenseurs à valeurs dans le fibré des (p', q') tenseurs.

DÉFINITION 5. — L'équation (D) est fortement invariante par le difféomorphisme μ de V si les équations (μ^*D) et $(D\mu^*)$ sont fortement équivalentes: pour tout point x de V , il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}_x$ et un automorphisme H du fibré des (p', q') tenseurs au-dessus de $\mathcal{O}_x$ tel que, pour tout champ ψ de (p, q) tenseurs sur $\mathcal{O}_x$, on ait sur $\mathcal{O}_x$, $\mu^*(D\psi) = HD(\mu^*\psi)$, c'est-à-dire

$$(9) \quad \forall y \in \mathcal{O}_x, \quad \mu^*(D\psi)_{\mu y} = H_y D(\mu^*\psi_{\mu y}).$$

2.3. Invariance d'une équation aux dérivées partielles sur les tenseurs par un groupe à un paramètre de difféomorphismes de V .

DÉFINITION 6. — L'équation (D) est fortement invariante par le groupe à un paramètre μ_t de difféomorphismes de V si pour tout point x de V , il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}_x$, un voisinage J_x de 0 dans $\mathbf{R}$ et une application H de J_x dans l'ensemble des automorphismes du fibré des (p', q') tenseurs au-dessus de $\mathcal{O}_x$ telle que

$$(10) \quad \text{l'application } (y, t) \in \mathcal{O}_x \times J_x \rightarrow H_y(t) \text{ est de classe } C^\infty,$$

$$(11) \quad \begin{cases} \forall t \in J_x, \quad \forall t' \in J_x, \quad t + t' \in J_x, \quad \forall y \in \mathcal{O}_x, \quad \mu_t y \in \mathcal{O}_x, \\ H_y(t + t') = \mu_t^* H_{\mu_t y}(t') H_y(t) \quad (\text{ce qui entraîne } H(0) = I_{\mathcal{O}_x}) \end{cases}$$

et, pour tout champ ψ de (p, q) tenseurs sur $\mathcal{O}_x$,

$$(12) \quad \forall y \in \mathcal{O}_x, \quad \forall t \in J_x, \quad \mu_t^*(D\psi)_{\mu_t y} = H_y(t) D(\mu_t^*\psi_{\mu_t y}).$$

PROPOSITION 5. — L'équation (D) est fortement invariante par le groupe à un paramètre μ_t de difféomorphismes de V engendré par le champ de vecteurs X , si et seulement si, pour tout point x de V , il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}_x$ et un endomorphisme K du fibré des (p', q') tenseurs au-dessus de $\mathcal{O}_x$ tel que, pour tout champ ψ de (p, q) tenseurs sur $\mathcal{O}_x$,

$$(13) \quad \mathfrak{L}(X)D\psi - D\mathfrak{L}(X)\psi = KD\psi, \quad \text{sur } \mathcal{O}_x.$$

La condition est nécessaire: reprenons la relation (7), 1.3, qui s'écrit

$$(\mathfrak{L}(X)D\psi)_y - (D\mathfrak{L}(X)\psi)_y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mu_t^*(D\psi)_{\mu_t y} - D(\mu_t^* \psi_{\mu_t y})}{t}.$$

Soit, d'après l'hypothèse d'invariance de (D),

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathcal{O}_x, \quad (\mathfrak{L}(X)D\psi)_y - (D\mathfrak{L}(X)\psi)_y &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{H_y(t) - H_y(0)}{t} D(\mu_t^* \psi_{\mu_t y}) \right) \\ &= \left(\frac{d}{dt} H_y(t) \right)_{t=0} (D\psi)_y. \end{aligned}$$

On pose $K_y = ((d/dt)H_y(t))_{t=0}$ et l'on définit ainsi un endomorphisme K du fibré des (p', q') tenseurs au-dessus de $\mathcal{O}_x$.

La condition est suffisante: soit x un point de V . On utilise, comme en 1.3, des coordonnées locales sur un voisinage $\mathcal{O}'_x \subset \mathcal{O}_x$. La condition (13) se traduit par

$$(14) \quad \forall (i) \in \mathbf{N}^n, \quad \mathfrak{L}(X)A^{(i)} = KA^{(i)}, \quad \text{sur } \mathcal{O}'_x.$$

On considère l'équation différentielle dépendant du paramètre $y \in \mathcal{O}'_x$

$$(15) \quad \left(\frac{d}{dt} - \mu_t^* K_{\mu_t y} \right) H_y(t) = 0.$$

Il existe un voisinage $\mathcal{O}''_x$ de x et un voisinage J_x de 0 dans $\mathbf{R}$ tels que (15) ait sur $\mathcal{O}''_x \times J_x$ une solution unique notée $H_y(t)$ telle que $H(0) = I_{\mathcal{O}''_x}$ et vérifiant (10) et (11) pour $y \in \mathcal{O}''_x$, $H(t)$ étant pour tout $t \in J_x$ un automorphisme du fibré des (p', q') tenseurs au-dessus de $\mathcal{O}''_x$. $H_y(t)$ étant solution de (15) et compte tenu de l'hypothèse (14) et de la relation (4), 1.3, on a

$$\forall y \in \mathcal{O}''_x, \quad \left(\frac{d}{dt} - \mu_t^* K_{\mu_t y} \right) (\mu_t^* A^{(i)}_{\mu_t y} - H_y(t) A^{(i)}_{\mu_t y}) = 0.$$

D'après l'unicité des solutions de (15) pour une condition initiale donnée, on en déduit

$$\forall y \in \mathcal{O}''_x, \quad \forall t \in J_x, \quad \mu_t^* A^{(i)}_{\mu_t y} - H_y(t) A^{(i)}_{\mu_t y} = 0.$$

D'où (12) pour tout $y \in \mathcal{O}''_x$.

Remarquons que si H est défini globalement sur V , $K_x = ((d/dt)H_x(t))_{t=0}$ définit un endomorphisme du fibré des (p', q') tenseurs sur V . Mais l'existence d'un endomorphisme global K n'implique pas l'existence d'automorphismes globaux $H(t)$.

La définition 6 et la proposition 5 sont valables aussi pour un groupe local à un paramètre de difféomorphismes locaux.

2.4. Invariance d'une équation aux dérivées partielles sur les tenseurs par un groupe de Lie de difféomorphismes de V . — Par une démonstration analogue à celle de la proposition 2, 1.4, on obtient

PROPOSITION 6. — Pour que l'équation (D) soit fortement invariante par G , groupe de LIE connexe de difféomorphismes de V , il faut et il suffit que, pour tout champ de vecteurs de KILLING X relatif au groupe de LIE G , il existe des endomorphismes locaux K_X du fibré des (p', q') tenseurs vérifiant (13).

2.5. Invariance d'une équation aux dérivées partielles sur les tenseurs-spineurs par un champ de vecteurs. — On reprend les notations de 1.5. Pour pouvoir étendre les résultats précédents à une équation aux dérivées partielles (D) sur le fibré des (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs à valeurs dans le fibré des (p', q') tenseurs- (r', s') spineurs, on introduit:

DÉFINITION 7. — L'équation (D) est invariante par le champ de vecteurs X au voisinage d'un point x de V s'il existe $\mathcal{U}_x \subset U_x$ (intersection de la trajectoire de X passant par x avec un voisinage ouvert de x , $\mathcal{O}_x \subset \Omega_x$), $J_x \subset I_x$ (voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$) et une application H de J_x dans l'ensemble des automorphismes du fibré des (p', q') tenseurs- (r', s') spineurs au-dessus de $\mathcal{U}_x$ telle que, pour tout $y \in \mathcal{U}_x$, les conditions (10) et (11) sont vérifiées et, pour tout champ ψ de (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs sur $\mathcal{U}_x$,

$$(16) \quad \forall y \in \mathcal{U}_x, \quad \forall t \in J_x, \quad \exp(tX)_y^*(D\psi)_{\mu_t y} = H_y(t) D(\exp(tX)_y^* \psi_{\mu_t y}).$$

On dit que l'équation (D) est invariante par le champ de vecteurs X si elle est invariante par X au voisinage de tout point de V .

PROPOSITION 7. — L'équation (D) est invariante par le champ de vecteurs X au voisinage d'un point x de V si et seulement s'il existe $\mathcal{U}_x \subset U_x$ (intersection de la trajectoire de X passant par x avec un voisinage ouvert de x , $\mathcal{O}_x \subset \Omega_x$) et un endomorphisme K du fibré des (p', q') tenseurs- (r', s') spineurs au-dessus de $\mathcal{U}_x$, tel que, pour tout champ ψ de (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs sur $\mathcal{U}_x$,

$$(17) \quad \mathfrak{L}(X)D\psi - D\mathfrak{L}(X)\psi = K D\psi, \quad \text{sur } \mathcal{U}_x.$$

On peut dire que pour que l'équation (D) soit invariante par le champ de vecteurs X ,

il faut et il suffit qu'il existe des endomorphismes K localement le long des trajectoires de X , tels que (17).

En effet, la démonstration de la proposition 5, 2.3, s'applique avec les hypothèses faites ici.

DÉFINITION 8. — L'équation (D) est fortement invariante par le champ de vecteurs X au voisinage d'un point x de V s'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}_x$ et un endomorphisme K du fibré des (p', q') tenseurs- (r', s') spineurs sur $\mathcal{O}_x$ tel que (13). On dit que l'équation (D) est fortement invariante par le champ de vecteurs X si elle est fortement invariante par X au voisinage de tout point de V .

D'après la proposition 5, on a

PROPOSITION 8. — Soit (D) une équation sur les tenseurs. L'équation (D) est fortement invariante par le champ de vecteurs X si et seulement si elle est fortement invariante par le groupe local à un paramètre de transformations locales μ_i engendré par X .

DÉFINITION 9. — Si une équation (D) sur les tenseurs-spineurs est invariante (resp. fortement invariante) par les champs de vecteurs de KILLING relatifs à un groupe de LIE connexe G de difféomorphismes de V , on dira que l'équation (D) est invariante (resp. fortement invariante) par le groupe G .

Cette définition est justifiée par la proposition 6. Elle étend aux équations aux dérivées partielles sur les spineurs la notion d'invariance par un groupe de LIE connexe de difféomorphismes de V .

L'invariance forte entraîne l'invariance, d'après la proposition 7.

2.6. *Cas des équations aux dérivées partielles non homogènes.* — On étend aux équations aux dérivées partielles non homogènes les définitions 5 à 8.

Une équation aux dérivées partielles non homogène sur les tenseurs (D_a) est fortement invariante par le difféomorphisme μ si et seulement si l'équation (D) est fortement invariante par μ et

$$(18) \quad \mu^*a = Ha, \quad \text{sur } \mathcal{O}_x.$$

Une équation aux dérivées partielles non homogène sur les tenseurs-spineurs (D_a) est invariante par le champ de vecteurs X si et seulement s'il existe des endomorphismes K localement le long des trajectoires X tels que (17) et

$$(19) \quad \mathfrak{L}(X)a = Ka, \quad \text{sur } \mathcal{U}_x.$$

Les propositions 5 à 8 se généralisent au cas des équations aux dérivées partielles non homogènes. On étend la définition 9.

2.7. *Cas des variétés analytiques.* — On reprend les hypothèses de 1.7. Les résultats sont les mêmes que dans le cas des variétés C^∞ , à condition de remplacer partout (y compris dans les définitions) C^∞ par « analytique ». On a, pour t assez petit,

$$H_\lambda(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \eta_i(x),$$

η_i étant défini par récurrence par $\eta_0 = 1$, $\eta_i = \eta_{i-1}K + \mathbb{L}(X)\eta_{i-1}$.

2.8. *Invariants et covariants.* — Les définitions de ce chapitre sont à rapprocher des notions d'invariant et de covariant d'une représentation continue d'un groupe de LIE (C. CHEVALLEY [8], §§ 9, 10 et 15). En effet, l'application qui à μ appartenant à un groupe de LIE G de difféomorphismes de V associe μ^* est une représentation de G dans l'espace vectoriel réel (de dimension infinie) des champs de (p, q) tenseurs sur V . La dérivation de LIE est la représentation de l'algèbre de LIE $\underline{G}$ de G associée à cette représentation de G .

De plus, toute représentation $\mathcal{R}$ de G dans l'espace vectoriel des champs de (p, q) tenseurs (de classe C^∞), vérifiant, pour tout champ ψ de (p, q) tenseurs, pour toute fonction $f \in \mathcal{F}(V)$,

$$\mathcal{R}(\mu)(f\psi) = (f \circ \mu)\mathcal{R}(\mu)\psi,$$

est de la forme $\mathcal{R}(\mu) = E(\mu)\mu^*$, les $E(\mu)$ étant des automorphismes du fibré des (p, q) tenseurs tels que

$$\forall \mu_1 \in G, \quad \forall \mu_2 \in G, \quad E(\mu_1\mu_2) = E(\mu_1)\mu_1^*E(\mu_2)$$

(c'est la relation (11), 2.3, avec $H(t) = E(\mu_t)^{-1}$). La représentation de l'algèbre de LIE $\underline{G}$ associée à $\mathcal{R}$ est

$$\underline{\mathcal{R}}: X \in \underline{G} \rightarrow \underline{\mathcal{R}}(X) = \mathbb{L}(X) + F_X,$$

où F_X est un endomorphisme du fibré des (p, q) tenseurs (si X engendre un sous-groupe à un paramètre de G de difféomorphismes μ_t , $F_X = ((d/dt)E(\mu_t))_{t=0}$).

On pourra donc considérer l'invariance des équations aux dérivées partielles comme la covariance pour les deux représentations μ^* et $\mathcal{R}(\mu) = H(\bar{\mu}^1)\mu^*$ de G , ou pour les deux représentations $\mathbb{L}(X)$ et $\underline{\mathcal{R}}(X) = \mathbb{L}(X) - K_X$ de $\underline{G}$.

Dans le cas des tenseurs-spineurs, pour certains groupes G (par exemple, le groupe des transformations conformes, d'après le résultat du chap. III, 5.3) la dérivation de LIE définit une représentation de l'algèbre de LIE $\underline{G}$ de G dans l'espace vectoriel sur C des champs de tenseurs-spineurs de type quelconque. L'invariance des équations aux dérivées partielles (2.5), compte tenu du fait que l'on exige seulement l'existence locale des endomorphismes K_X , est la covariance pour les deux représentations $\mathbb{L}(X)$ et $\mathbb{L}(X) - K_X$ de $\underline{G}$.

$\mathcal{M}$ étant une représentation de $\underline{G}$ dans l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ des champs de (p, q) tenseurs- (r, s) spineurs, on peut définir de même la $\mathcal{M}$ -invariance comme la covariance pour les deux représentations $\mathcal{M}(X)$ et $\mathcal{M}(X) - K_X$ de $\underline{G}$. Par exemple, $\mathcal{M}$ peut être défini comme au chap. III, 3.1, avec la condition

$$\forall X \in \underline{G}, \quad \forall X' \in \underline{G}, \quad \lambda_{[X, X']} - [\lambda_X, \lambda_{X'}] - \mathfrak{L}(X)\lambda_{X'} + \mathfrak{L}(X')\lambda_X = 0.$$

CHAPITRE V

SPINEURS HARMONIQUES, ÉQUATIONS DE DIRAC, ÉQUATIONS DE MAXWELL

On considère, dans ce chapitre, une variété spinorielle V qui est une variété riemannienne ou pseudo-riemannienne. Le vocabulaire utilisé est parfois celui de la géométrie riemannienne (isométrie, harmonique), parfois celui de la relativité générale (équations de DIRAC, de MAXWELL, vecteur courant). Sauf en 1.3, les résultats énoncés sont valables quelle que soit la signature de la métrique de la variété V , et en particulier si V est l'espace-temps de la relativité générale (supposé être une variété spinorielle!).

1. — Opérateurs de Dirac.

1.1. Définition. — On reprend les définitions et les résultats de A. LICHTNEROWICZ [31], [28] et [29]. On suppose V de classe C^2 au moins. Soient P et Δ l'opérateur de DIRAC et le laplacien sur les champs de $(1, 0)$ spineurs ψ :

$$P\psi = \gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi, \quad \Delta\psi = P^2\psi;$$

soient $\hat{P}$ et Δ l'opérateur de DIRAC et le laplacien sur les $(0, 1)$ spineurs ψ :

$$\hat{P}\psi = -(\nabla_\alpha \psi)\gamma^\alpha, \quad \Delta\psi = \hat{P}^2\psi;$$

soient $\mathfrak{F}$ et $\hat{\mathfrak{F}}$ les deux opérateurs de DIRAC et Δ le laplacien sur les $(1, 1)$ spineurs ψ :

$$\mathfrak{F}\psi = \gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi, \quad \hat{\mathfrak{F}}\psi = -(\nabla_\alpha \psi)\gamma^\alpha, \quad \Delta\psi = \mathfrak{F}^2\psi = \hat{\mathfrak{F}}^2\psi.$$

Un $(1, 0)$ spineur, un $(0, 1)$ spineur ou un $(1, 1)$ spineur ψ est dit *harmonique* si $\Delta\psi = 0$.

Les opérateurs de DIRAC P , $\hat{P}$, $\mathfrak{F}$ et $\hat{\mathfrak{F}}$ sont des opérateurs différentiels de degré 1. Les laplaciens Δ sont des opérateurs différentiels de degré 2.

1.2. *Commutation des opérateurs de Dirac avec la dérivation de Lie.* — On a,
 $\forall \psi \in \underline{S(V)},$

$$(1) \quad \mathfrak{L}(X)(P\psi) - P(\mathfrak{L}(X)\psi) = \gamma^\alpha (\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha \psi + (\mathfrak{L}(X)\gamma)^\alpha \nabla_\alpha \psi,$$

$\forall \psi \in \underline{S^*(V)},$

$$(2) \quad \mathfrak{L}(X)(\hat{P}\psi) - \hat{P}(\mathfrak{L}(X)\psi) = \psi(\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha \gamma^\alpha - (\nabla_\alpha \psi)(\mathfrak{L}(X)\gamma)^\alpha,$$

et, $\forall \psi \in \underline{S(V)} \otimes \underline{S^*(V)},$

$$(3) \quad \mathfrak{L}(X)(\mathfrak{F}\psi) - \mathfrak{F}(\mathfrak{L}(X)\psi) = \gamma^\alpha ((\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha \psi - \psi(\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha) + (\mathfrak{L}(X)\gamma)^\alpha \nabla_\alpha \psi,$$

$$(4) \quad \mathfrak{L}(X)(\hat{\mathfrak{F}}\psi) - \hat{\mathfrak{F}}(\mathfrak{L}(X)\psi) = -((\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha \psi - \psi(\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha) \gamma^\alpha - (\nabla_\alpha \psi)(\mathfrak{L}(X)\gamma)^\alpha.$$

LEMME. — Une condition suffisante pour que l'opérateur de DIRAC P (resp. $\hat{P}$) commute avec la dérivation de LIE $\mathfrak{L}(X)$ par le champ de vecteur X sur un $(1, 0)$ spineur (resp. un $(0, 1)$ spineur) ψ est que $\gamma^\alpha (\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha = 0$ et $(\mathfrak{L}(X)\gamma)^\alpha \nabla_\alpha \psi = 0$ (resp. $(\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha \gamma^\alpha = 0$ et $(\nabla_\alpha \psi)(\mathfrak{L}(X)\gamma)^\alpha = 0$).

Cas d'une dérivation quelconque. — On considère une dérivation $\mathcal{M}(X)$ prolongeant la dérivation de LIE des tenseurs, définie par le $(1, 1)$ spineur λ_X (chap. III, 3.1). D'après la relation (46), chap. III, 6.4, on a, $\forall \psi \in \underline{S(V)},$

$$\mathcal{M}(X)(P\psi) - P(\mathcal{M}(X)\psi) = \gamma^\alpha ((\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha - \nabla_\alpha \lambda_X) \psi + ((\mathfrak{L}(X)\gamma)^\alpha + \lambda_X \gamma^\alpha - \gamma^\alpha \lambda_X) \nabla_\alpha \psi$$

et des formules analogues pour les $(0, 1)$ spineurs et les $(1, 1)$ spineurs.

1.3. *Spineurs harmoniques.* — On a les identités:

$$\forall \psi \in \underline{S(V)}, \quad \mathfrak{L}(X)\psi = \left(\frac{1}{2} X^\alpha \nabla_\alpha \psi + \frac{1}{4} (\delta X)\psi - \frac{1}{4} X_\alpha \gamma^\alpha P\psi\right) - \frac{1}{4} P(X_\alpha \gamma^\alpha \psi),$$

$$\forall \psi \in \underline{S^*(V)}, \quad \mathfrak{L}(X)\psi = \left(\frac{1}{2} X^\alpha \nabla_\alpha \psi + \frac{1}{4} (\delta X)\psi + \frac{1}{4} X_\alpha (\hat{P}\psi) \gamma^\alpha\right) + \frac{1}{4} \hat{P}(X_\alpha \psi \gamma^\alpha),$$

$$\forall \psi \in \underline{S(V)} \otimes \underline{S^*(V)}, \quad \mathfrak{L}(X)\psi = \left(\frac{1}{2} (\delta X)\psi - \frac{1}{4} X_\alpha \gamma^\alpha \mathfrak{F}\psi + \frac{1}{4} X_\alpha (\hat{\mathfrak{F}}\psi) \gamma^\alpha\right) - \frac{1}{4} \mathfrak{F}(X_\alpha \gamma^\alpha \psi) + \frac{1}{4} \hat{\mathfrak{F}}(X_\alpha \psi \gamma^\alpha).$$

Supposons la variété V riemannienne et compacte. On peut alors généraliser les résultats de A. LICHNEROWICZ [31], § 6.

PROPOSITION 1. — Tout champ de vecteurs X à dérivée covariante nulle laisse invariants tout $(1, 0)$ spineur harmonique et tout $(0, 1)$ spineur harmonique.

En effet, si $\nabla X = 0$, alors, $\forall \psi \in \underline{S(V)}, \quad \mathfrak{L}(X)P\psi = P\mathfrak{L}(X)\psi$ et $\forall \psi \in \underline{S^*(V)}, \quad \mathfrak{L}(X)\hat{P}\psi = \hat{P}\mathfrak{L}(X)\psi$, d'après (48) et (50), chap. III, 6.6 et le lemme, 1.2. Donc, si

ψ est harmonique, $\mathfrak{L}(X)\psi$ est harmonique. D'autre part, on a alors

$$\text{si } \psi \in \underline{S(V)}, \quad \mathfrak{L}(X)\psi = X^\alpha \nabla_\alpha \psi = \frac{1}{2} X^\alpha \nabla_\alpha \psi - \frac{1}{4} P(X_\alpha \gamma^\alpha \psi) = -\frac{1}{2} P(X_\alpha \gamma^\alpha \psi),$$

$$\text{si } \psi \in \underline{S^*(V)}, \quad \mathfrak{L}(X)\psi = X^\alpha \nabla_\alpha \psi = \frac{1}{2} X^\alpha \nabla_\alpha \psi + \frac{1}{4} \hat{P}(X_\alpha \psi \gamma^\alpha) = \frac{1}{2} \hat{P}(X_\alpha \psi \gamma^\alpha).$$

D'après le théorème 1, A. LICHNEROWICZ [31], on a donc $\mathfrak{L}(X)\psi = 0$.

PROPOSITION 2. — Toute isométrie infinitésimale laisse invariants tout $(1, 0)$ spineur à dérivée covariante nulle et tout $(0, 1)$ spineur à dérivée covariante nulle.

En effet, on a alors, compte tenu de $\delta X = 0$,

$$\text{si } \psi \in \underline{S(V)}, \quad \mathfrak{L}(X)\psi = -\frac{1}{4} P(X_\alpha \gamma^\alpha \psi) \quad \text{et} \quad P\psi = 0,$$

$$\text{si } \psi \in \underline{S^*(V)}, \quad \mathfrak{L}(X)\psi = \frac{1}{4} \hat{P}(X_\alpha \psi \gamma^\alpha) \quad \text{et} \quad \hat{P}\psi = 0.$$

Puisque $\nabla\psi = 0$, d'après la proposition 14, chap. III, 6.5 et le lemme, 1.2, l'opérateur de DIRAC commute avec $\mathfrak{L}(X)$, donc $\mathfrak{L}(X)\psi$ est harmonique.

On peut remarquer que le raisonnement est valable pour tout champ de vecteurs X à divergence nulle et tel que $\gamma^\alpha(\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha = 0$ ou $(\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha \gamma^\alpha = 0$; mais on sait (chap. III, 6.6) que sur une variété riemannienne compacte un tel champ de vecteurs est une isométrie infinitésimale.

PROPOSITION 3. — Toute isométrie infinitésimale laisse invariant tout $(1, 1)$ spineur harmonique.

ψ étant un $(1, 1)$ spineur harmonique, on a $\mathfrak{F}\psi = 0$ et $\hat{\mathfrak{F}}\psi = 0$, d'où

$$\mathfrak{L}(X)\psi = -\frac{1}{4} \mathfrak{F}(X_\alpha \gamma^\alpha \psi) + \frac{1}{4} \hat{\mathfrak{F}}(X_\alpha \psi \gamma^\alpha),$$

compte tenu du fait que $\delta X = 0$. D'autre part, X étant une isométrie infinitésimale, on a $\mathfrak{L}(X)\gamma = 0$ et $\mathfrak{L}(X)\sigma = 0$, donc d'après (3) et (4), 1.2, $\mathfrak{F}$ et $\hat{\mathfrak{F}}$ commutent avec $\mathfrak{L}(X)$. Il suffit donc de montrer que si un $(1, 1)$ spineur A est de la forme $\mathfrak{F}B + \hat{\mathfrak{F}}\hat{B}$ et vérifie $\mathfrak{F}A = 0$ et $\hat{\mathfrak{F}}A = 0$, il est nul. En effet, en introduisant le produit scalaire global sur la variété compacte V et en utilisant le fait que $\mathfrak{F}$ et $\hat{\mathfrak{F}}$ sont auto-adjoints, on a

$$\langle A, A \rangle = \langle \mathfrak{F}B, A \rangle + \langle \hat{\mathfrak{F}}\hat{B}, A \rangle = \langle B, \mathfrak{F}A \rangle + \langle \hat{B}, \hat{\mathfrak{F}}A \rangle = 0.$$

Autre démonstration: soit $\alpha = \bar{S}^1 \psi$, S étant l'isomorphisme défini au chap. I, 2.4. On a (A. LICHNEROWICZ [30]) $\Delta S\alpha = S\Delta\alpha$ (où Δ est le laplacien sur les formes), donc si ψ est un $(1, 1)$ spineur harmonique, $\alpha = \bar{S}^1 \psi$ est une forme harmonique. On sait (A. LICHNEROWICZ [27], chap. V, § 80) qu'une forme harmonique est invariante par toute isométrie infinitésimale. De $\mathfrak{L}(X)\alpha = 0$ on déduit $\mathfrak{L}(X)\psi = 0$ par la proposition 4, chap. III, 3.4.

REMARQUE. — On peut comparer avec Y. KOSMANN [23]: dans cette note, la définition adoptée pour la « dérivation de LIE » par un champ de vecteurs X est la dérivation appelée ici $\mathfrak{L}_X(X)$ (chap. III, 3.1); on remarque que les résultats obtenus avec cette définition (proposition 3 de cette note) ne font pas jouer aux $(1, 0)$ spineurs et aux $(0, 1)$ spineurs des rôles symétriques; cette symétrie apparaît au contraire avec la définition de la dérivation de LIE déterminée aux chapitres II et III et utilisée ici.

2. — Équations de Dirac.

2.1. *Invariance par une transformation infinitésimale.* — On considère les opérateurs de DIRAC définis en 1.1. On introduit une fonction scalaire m , appelée masse, dont on cherche à déterminer la loi de transformation pour que les équations de DIRAC ci-dessous soient invariantes par les homothéties infinitésimales. Les équations de DIRAC s'écrivent:

$$\begin{aligned} \text{sur les } (1, 0)\text{spineurs,} & \quad (P - m)\psi = 0 ; \\ \text{sur les } (0, 1)\text{spineurs,} & \quad (\hat{P} - m)\psi = 0 ; \\ \text{sur les } (1, 1)\text{spineurs,} & \quad (\mathfrak{F} - m)\psi = 0 \quad \text{et} \quad (\hat{\mathfrak{F}} - m)\psi = 0 . \end{aligned}$$

On cherche des conditions d'invariance ou d'invariance forte (définitions 7 et 8 du chap. IV, 2.5) des équations de DIRAC par un champ de vecteurs X . L'invariance et l'invariance forte donnant les mêmes conclusions, on écrira « invariance ». Les spineurs considérés sont définis sur un ouvert de V ou le long d'une trajectoire de X ; pour simplifier, on ne précise pas les domaines de définition.

L'équation de DIRAC sur les $(1, 0)$ spineurs, $(P - m)\psi = 0$ (resp. sur les $(0, 1)$ spineurs, $(\hat{P} - m)\psi = 0$) est invariante par le champ de vecteurs X si et seulement s'il existe un champ K (resp. $\hat{K}$) de $(1, 1)$ spineurs dépendant de X et de m tel que

$$(5) \quad \forall \psi \in \underline{S(V)}, \quad \mathfrak{L}(X)(P - m)\psi - (P - m)\mathfrak{L}(X)\psi = K((P - m)\psi)$$

(resp.

$$(6) \quad \forall \psi \in \underline{S^*(V)}, \quad \mathfrak{L}(X)(\hat{P} - m)\psi - (\hat{P} - m)\mathfrak{L}(X)\psi = (\hat{P} - m)\psi \hat{K} .$$

Les équations de DIRAC sur les $(1, 1)$ spineurs $(\mathfrak{F} - m)\psi = 0$ et $(\hat{\mathfrak{F}} - m)\psi = 0$ sont invariantes par le champ de vecteurs X si et seulement s'il existe des endomorphismes $\mathcal{K}$ et $\hat{\mathcal{K}}$ du fibré des $(1, 1)$ spineurs (c'est-à-dire des champs de $(2, 2)$ spineurs), dépendant de X et de m , tels que

$$(7) \quad \forall \psi \in \underline{S(V) \otimes S^*(V)}, \quad \mathfrak{L}(X)(\mathfrak{F} - m)\psi - (\mathfrak{F} - m)\mathfrak{L}(X)\psi = \mathcal{K}((\mathfrak{F} - m)\psi)$$

$$(8) \quad \forall \psi \in \underline{S(V) \otimes S^*(V)}, \quad \mathfrak{L}(X)(\hat{\mathfrak{F}} - m)\psi - (\hat{\mathfrak{F}} - m)\mathfrak{L}(X)\psi = \hat{\mathcal{K}}((\hat{\mathfrak{F}} - m)\psi) .$$

2.2. Cas des $(1, 0)$ spineurs et des $(0, 1)$ spineurs. — Les relations (1) et (2), 1.2, montrent que

$$(9) \quad \forall \psi \in \underline{S(V)}, \quad \mathfrak{L}(X)(P - m)\psi - (P - m)\mathfrak{L}(X)\psi = \\ = (\mathfrak{L}(X)\gamma)^\alpha \nabla_\alpha \psi + \gamma^\alpha (\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha \psi - (\mathfrak{L}(X)m)\psi,$$

$$(10) \quad \forall \psi \in \underline{S^*(V)}, \quad \mathfrak{L}(X)(\hat{P} - m)\psi - (\hat{P} - m)\mathfrak{L}(X)\psi = \\ = -(\nabla_\alpha \psi)(\mathfrak{L}(X)\gamma)^\alpha + \psi(\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha \gamma^\alpha - (\mathfrak{L}(X)m)\psi.$$

D'où la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation de DIRAC sur les $(1, 0)$ spineurs, $(P - m)\psi = 0$ (resp. sur les $(0, 1)$ spineurs, $(\hat{P} - m)\psi = 0$) soit invariante par le champ de vecteurs X (obtenue en écrivant (9) (resp. (10)) pour tout champ $f\psi$, $f \in \mathcal{F}(V)$, $\psi \in \underline{S(V)}$ (resp. $\underline{S^*(V)}$)): il existe un champ de $(1, 1)$ spineurs K (resp. $\hat{K}$) tel que

$$(a) \quad \forall \alpha = 1, 2, \dots, n, \quad (\mathfrak{L}(X)\gamma)^\alpha = K\gamma^\alpha,$$

$$(b) \quad \forall \psi \in \underline{S(V)}, \quad \gamma^\alpha (\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha \psi - (\mathfrak{L}(X)m)\psi = -Km\psi.$$

(resp.

$$(\hat{a}) \quad \forall \alpha = 1, 2, \dots, n, \quad (\mathfrak{L}(X)\gamma)^\alpha = \gamma^\alpha \hat{K},$$

$$(\hat{b}) \quad \forall \psi \in \underline{S^*(V)}, \quad \psi(\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha \gamma^\alpha - (\mathfrak{L}(X)m)\psi = -m\psi \hat{K}.$$

Pour qu'il existe un tel champ de $(1, 1)$ spineurs K (resp. $\hat{K}$) il faut et il suffit que X soit une transformation infinitésimale conforme et que

$$(c) \quad d\delta X = 0,$$

$$(d) \quad \mathfrak{L}(X)m = \frac{1}{n} \delta X m.$$

Faisons la démonstration dans le cas des $(1, 0)$ spineurs. De la condition (a), on déduit, compte tenu de (12), chap. III, 2.5,

$$K = \frac{1}{n} \delta X I \quad \text{et} \quad \mathfrak{L}(X)\gamma = \frac{1}{n} \delta X \gamma.$$

On reconnaît la condition nécessaire et suffisante pour que X soit une transformation infinitésimale conforme de divergence δX (chap. III, 2.5). L'identité (a) est donc satisfaite si et seulement si X est une transformation infinitésimale conforme et $K = (1/n)\delta X I$. L'identité (b) entraîne alors $\gamma^\alpha (\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha - \mathfrak{L}(X)m = -(1/n)\delta X m$. On utilise la relation (53), chap. III, 6.6, et l'on en déduit (c) et (d), si $n \geq 2$.

La démonstration est analogue dans le cas des $(0, 1)$ spineurs. On trouve $\hat{K} = (1/n)\delta X I$ et les résultats obtenus sont identiques.

La condition (c) entraîne que X est nécessairement une homothétie infinitésimale.

La condition (d) donne la loi de transformation que doit vérifier la masse m . Elle exprime que la fonction scalaire m doit être de poids conforme 1.

2.3. Cas des $(1, 1)$ spineurs. — Les relations (3) et (4), 1.2, montrent que, $\forall \psi \in \underline{S(V)} \otimes S^*(V)$,

$$(11) \quad \begin{aligned} \mathfrak{L}(X)(\mathfrak{F} - m)\psi - (\mathfrak{F} - m)\mathfrak{L}(X)\psi \\ = (\mathfrak{L}(X)\gamma)^\alpha \nabla_\alpha \psi + \gamma^\alpha \left((\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha \psi - \psi (\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha \right) - (\mathfrak{L}(X)m)\psi, \end{aligned}$$

$$(12) \quad \begin{aligned} \mathfrak{L}(X)(\hat{\mathfrak{F}} - m)\psi - (\hat{\mathfrak{F}} - m)\mathfrak{L}(X)\psi = \\ = -(\nabla_\alpha \psi)(\mathfrak{L}(X)\gamma)^\alpha - \left((\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha \psi - \psi (\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha \right) \gamma^\alpha - (\mathfrak{L}(X)m)\psi. \end{aligned}$$

D'où la condition nécessaire et suffisante pour que les équations de DIRAC sur les $(1, 1)$ spineurs $(\mathfrak{F} - m)\psi = 0$ et $(\hat{\mathfrak{F}} - m)\psi = 0$ soient invariantes par le champ de vecteurs X : il existe des champs de $(2, 2)$ spineurs $\mathfrak{K}$ et $\hat{\mathfrak{K}}$ tels que

$$(A) \quad \forall \alpha = 1, 2, \dots, n, \quad \forall \psi \in \underline{S(V)} \otimes S^*(V), \quad (\mathfrak{L}(X)\gamma)^\alpha \psi - \mathfrak{K}(\gamma^\alpha \psi) = 0$$

$$(B) \quad \forall \psi \in \underline{S(V)} \otimes S^*(V), \quad \gamma^\alpha \left((\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha \psi - \psi (\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha \right) - (\mathfrak{L}(X)m)\psi = -\mathfrak{K}(m\psi)$$

$$(\hat{A}) \quad \forall \alpha = 1, 2, \dots, n, \quad \forall \psi \in \underline{S(V)} \otimes S^*(V), \quad \psi (\mathfrak{L}(X)\gamma)^\alpha - \hat{\mathfrak{K}}(\psi \gamma^\alpha) = 0$$

$$(\hat{B}) \quad \forall \psi \in \underline{S(V)} \otimes S^*(V), \quad - \left((\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha \psi - \psi (\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha \right) \gamma^\alpha - (\mathfrak{L}(X)m)\psi = -\hat{\mathfrak{K}}(m\psi).$$

Nous allons montrer que ces conditions sont équivalentes aux conditions trouvées dans le cas des $(1, 0)$ spineurs et des $(0, 1)$ spineurs (2.2):

Ecrivant que l'identité (A) est vérifiée par tout $(1, 1)$ spineur de degré 1 (image par S d'une 1-forme), on trouve, compte tenu de (10) et (12), chap. III, 2.5, $\mathfrak{K}(I) = (1/n)\delta X I$, puis $\mathfrak{L}(X)\gamma = (1/n)\delta X \gamma$. L'identité (A) est donc satisfaite si et seulement si X est une transformation infinitésimale conforme et $\mathfrak{K} = (1/n)\delta X I$.

Ecrivant que l'identité (B) est vérifiée par tout $(1, 1)$ spineur de degré 0 (fonction complexe) on obtient

$$(d) \quad \mathfrak{L}(X)m = \frac{1}{n} \delta X m.$$

Ecrivant que l'identité (B) est vérifiée par tout $(1, 1)$ spineur de degré 1, on obtient

$$\forall \beta = 1, 2, \dots, n, \quad \gamma^\alpha (\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha \gamma^\beta - \gamma^\alpha \gamma^\beta (\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha = 0.$$

On applique alors le lemme 7, chap. III, 6.6: le champ de vecteurs X doit laisser invariante la connexion spinorielle canonique. Or, les transformations infinitésimales conformes qui laissent invariante la connexion spinorielle canonique sont les homothéties infinitésimales (proposition 16, chap. III, 6.6).

Si X est une homothétie infinitésimale, et si la masse m vérifie (d), les conditions $(\hat{A})$ et $(\hat{B})$ qui expriment l'invariance de l'équation $(\hat{\mathcal{F}} - m)\psi = 0$ sont satisfaites.

Si l'on étudie l'invariance du système $(\mathcal{F} - m)\psi = 0$ et $(\hat{\mathcal{F}} - m)\psi = 0$ (chap. IV, 2.1) les résultats sont les mêmes.

2.4. Conclusions sur l'invariance des équations de Dirac.

PROPOSITION 4. — Pour que les équations de DIRAC sur les $(1, 0)$ spineurs, $(P - m)\psi = 0$, sur les $(0, 1)$ spineurs, $(\hat{P} - m)\psi = 0$ ou sur les $(1, 1)$ spineurs, $(\mathcal{F} - m)\psi = 0$ et $(\hat{\mathcal{F}} - m)\psi = 0$, soient invariantes ou fortement invariantes par un champ de vecteurs X , il faut et il suffit que X soit une homothétie infinitésimale et que, dans cette homothétie infinitésimale, la masse m se transforme suivant (d) $\mathcal{L}(X)m = (1/n)\delta X m$.

En particulier, pour que les équations de DIRAC sans terme de masse ($m = 0$) soient invariantes ou fortement invariantes par le champ de vecteurs X , il faut et il suffit que X soit une homothétie infinitésimale.

Loi de transformation de la masse. — On suppose que la masse m est une fonction scalaire vérifiant la relation (d) pour une transformation infinitésimale X . Sur un ouvert où il existe un champ de repères z sur V , considérons la fonction scalaire $M = |g(z)|^{-1/2n}$, où g désigne le déterminant du tenseur métrique (voir ci-dessous, 3.1). On a $\mathcal{L}(X)M = (1/n)\delta X M$. Donc, sur un tel ouvert, m est de la forme $m_0 M$, où m_0 est une fonction scalaire constante sur les trajectoires de X .

La loi de transformation de la masse (d) est bien celle que supposent J. A. SCHOUTEN et J. HAANTJES [41] et T. FULTON, F. ROHRlich et L. WITTEN [17] qui considèrent (avec les notations utilisées ici) une transformation conforme $\exp X$ et posent $(\exp X)^*g = sg$. On en déduit $\mathcal{L}(X)g = (\text{Log } s)g$, soit $s = \exp(-(2/n)\delta X)$. D'autre part ces auteurs supposent la loi de variation $(\exp X)^*m = m/\sqrt{s}$, qui s'écrit donc $(\exp X)^*m = \exp((1/n)\delta X)m$ et qui est équivalente à $\mathcal{L}(X)m = (1/n)\delta X m$.

Par le raisonnement de T. FULTON, F. ROHRlich et L. WITTEN ([17], p. 455) on peut démontrer l'invariance par les homothéties infinitésimales. Le raisonnement ne peut se généraliser (à une transformation conforme non affine) car la relation $(\exp X)^*\nabla\psi = \nabla(\exp X)^*\psi$ n'est vraie que pour une transformation infinitésimale X qui laisse invariante la connexion spinorielle canonique, donc parmi les transformations infinitésimales conformes, seulement pour les homothéties infinitésimales (même dans un espace plat). Ici, on trouve plus précisément la condition nécessaire et suffisante supplémentaire $\gamma^a(\mathcal{L}(X)\sigma)_a = 0$, qui est vérifiée si et seulement si la transformation infinitésimale conforme X est une homothétie infinitésimale.

D'autre part, les démonstrations de 2.2 et 2.3 montrent que, si l'on considère la généralisation des équations de DIRAC du cas plat obtenue en prenant la dérivation covariante dans la connexion de WEYL $\omega_{\mathcal{W}}$ et la connexion spinorielle $\sigma_{\mathcal{W}}$ associée, on obtient des équations invariantes par toute transformation infinitésimale conforme, puisque par définition, si X est conforme, $\mathfrak{L}(X)\omega_{\mathcal{W}} = 0$, d'où $\mathfrak{L}(X)\sigma_{\mathcal{W}} = \tau(\mathfrak{L}(X)\omega_{\mathcal{W}}) = 0$ (chap. III, 6.2). On retrouve ainsi le résultat de l'article cité.

De la proposition 4 et de la définition 9, chap. IV, 2.5, on déduit

COROLLAIRE. — Soit H le plus grand groupe connexe d'homothéties de V . On suppose que la masse m vérifie, pour tout $\mu \in H$, de rapport R , $m \circ \mu = (1/R)m$. Alors les équations de DIRAC sont fortement invariantes par H .

Cas d'une dérivation quelconque. — On cherche à résoudre le problème posé au chap. IV, 2.8, $\mathcal{M}(X)$ étant une dérivation définie par le $(1, 1)$ spineur λ_X . On utilise les résultats de 1.2.

L'équation de DIRAC sur les $(1, 0)$ spineurs, $(P - m)\psi = 0$ (resp. sur les $(0, 1)$ spineurs, $(\hat{P} - m)\psi = 0$) est $\mathcal{M}(X)$ -invariante si et seulement si X est une transformation infinitésimale conforme, $\mathfrak{L}(X)m = (1/n)\delta X m$ et λ_X est à une constante additive près la fonction scalaire $-[(n-1)/2n]\delta X$ (resp. $[(n-1)/2n]\delta X$).

Dans le cas des équations de DIRAC sur les $(1, 1)$ spineurs, on trouve la condition: λ_X est somme d'une fonction scalaire et d'un $(1, 1)$ spineur λ'_X de degré 2 tel que $\nabla \lambda'_X = \mathfrak{L}(X)\sigma$.

Cette remarque permet de donner un sens précis à une phrase comme: « les équations de DIRAC sont invariantes par le groupe conforme ». Cependant, on voit que l'invariance par le plus grand groupe connexe de transformations conformes (si celui-ci n'est pas réduit à un groupe d'homothéties) ne peut être l'invariance au sens du chap. IV, 2.5, mais une $\mathcal{M}$ -invariance (chap. IV, 2.8).

2.5. *Invariance des opérateurs de Dirac.* — Pour que l'opérateur différentiel $P - m$ sur les $(1, 0)$ spineurs soit invariant par le champ de vecteurs X , il faut et il suffit que l'équation aux dérivées partielles correspondante $(P - m)\psi = 0$ soit invariante par X avec, de plus, $K = 0$. De cette remarque et des remarques analogues pour le cas des $(0, 1)$ spineurs et des $(1, 1)$ spineurs, on déduit

PROPOSITION 5. — Pour que les opérateurs différentiels $P - m$ sur les $(1, 0)$ spineurs, $\hat{P} - m$ sur les $(0, 1)$ spineurs ou $\mathfrak{P} - m$ et $\hat{\mathfrak{P}} - m$ sur les $(1, 1)$ spineurs soient invariants par un champ de vecteurs X , il faut et il suffit que X soit une isométrie infinitésimale et que la masse m soit invariante par cette isométrie infinitésimale (c'est-à-dire soit constante sur les trajectoires de X).

En particulier, pour que les opérateurs de DIRAC ($m = 0$) soient invariants par le champ de vecteurs X il faut et il suffit que X soit une isométrie infinitésimale.

De la prop. 5, et de la prop. 2, chap. IV, 1.4, on déduit

COROLLAIRE. — Soit $\mathfrak{J}$ le plus grand groupe connexe d'isométries de V . On suppose que la masse m est invariante par toutes les transformations de $\mathfrak{J}$. Alors les opérateurs de DIRAC sont invariants par le groupe $\mathfrak{J}$.

3. — Équations de Maxwell.

L'étude faite dans ce paragraphe est indépendante de la théorie des spineurs: on considère une variété V riemannienne ou pseudo-riemannienne, orientée, de classe C^2 au moins (mais on ne suppose pas que la variété V admette une structure spinorielle).

3.1. *Commutation de la dérivation de Lie avec l'opérateur δ .* — On utilise les résultats de A. LICHNEROWICZ [26], chap. IV, §§ 81, 82 et 83. Soit η la n -forme élément de volume de la variété V . On notera g le déterminant du tenseur métrique g . C'est une densité scalaire (A. LICHNEROWICZ [27], chap. II, § 22) de poids 2. $\sqrt{|g|}$ est une densité scalaire de poids 1. On a $\nabla(\sqrt{|g|}) = 0$, donc

$$(13) \quad \mathfrak{L}(X)\sqrt{|g|} = -\delta X\sqrt{|g|},$$

où $\delta X = -\nabla_\lambda X^\lambda$ est la divergence du champ de vecteurs X . $*$ désigne l'adjonction des formes, $\tilde{g}$ le $(2, 0)$ tenseur métrique.

On définit $n+1$ champs de $(p, n-p)$ tenseurs par

$$(14) \quad p = 0, 1, \dots, n, \quad \left(\overset{n-p}{\eta} \right)^{\lambda_1 \dots \lambda_p}_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} = g^{\lambda_1 \nu_1} \dots g^{\lambda_p \nu_p} \eta_{\nu_1 \dots \nu_p \mu_1 \dots \mu_{n-p}}.$$

En particulier, pour $p = 0$, on a $\overset{n}{\eta} = \eta$. On a $\mathfrak{L}(X)\eta = -\delta X\eta$ et

$$(15) \quad (\mathfrak{L}(X) \overset{n-p}{\eta})^{\lambda_1 \dots \lambda_p}_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} = \sum_{r=1}^p g^{\lambda_r \nu_r} \dots (\mathfrak{L}(X)\tilde{g})^{\lambda_r \nu_r} \dots g^{\lambda_p \nu_p} \eta_{\nu_1 \dots \nu_p \mu_1 \dots \mu_{n-p}} - \delta X \overset{n-p}{\eta}^{\lambda_1 \dots \lambda_p}_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}}.$$

Si $\overset{p}{\alpha}$ est un $(0, p)$ tenseur et si $\overset{n-p}{\beta}$ est un $(p, n-p)$ tenseur, on considère le $(0, n-p)$ tenseur $\langle \overset{n-p}{\beta}, \overset{p}{\alpha} \rangle$ défini par

$$\langle \overset{n-p}{\beta}, \overset{p}{\alpha} \rangle_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} = \left(\overset{n-p}{\beta} \right)^{\lambda_1 \dots \lambda_p}_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} \overset{p}{\alpha}_{\lambda_1 \dots \lambda_p}.$$

Si $\overset{p}{\alpha}$ est une p -forme, l'adjointe de $\overset{p}{\alpha}$ est la $(n-p)$ -forme

$$*\overset{p}{\alpha} = \frac{1}{p!} \overset{n-p}{\iota} \overset{p}{\alpha}.$$

On sait que

$$**\overset{p}{\alpha} = \frac{g}{|g|} (-1)^{p(n-p)} \overset{p}{\alpha}.$$

On a la relation de commutation de $\mathfrak{L}(X)$ avec $*$

$$(16) \quad \mathfrak{L}(X)(*\overset{p}{\alpha}) - *(\mathfrak{L}(X)\overset{p}{\alpha}) = \frac{1}{p!} \langle \mathfrak{L}(X)\overset{n-p}{\eta}, \overset{p}{\alpha} \rangle.$$

En appliquant la définition de $\overline{*}^{-1}$ comme opération inverse de $*$ et la relation (16), on obtient

$$(17) \quad \mathfrak{L}(X)(\overline{*}^{-1}\overset{q}{\alpha}) - \overline{*}^{-1}(\mathfrak{L}(X)\overset{q}{\alpha}) = -\frac{1}{(n-q)!} \overline{*}^{-1} \langle \mathfrak{L}(X)\overset{q}{\eta}, \overline{*}^{-1}\overset{q}{\alpha} \rangle.$$

On trouve aussi

$$(18) \quad \mathfrak{L}(X)(\overline{*}^{-1}\overset{q}{\alpha}) - \overline{*}^{-1}(\mathfrak{L}(X)\overset{q}{\alpha}) = \frac{g}{|g|} \frac{(-1)^{q(n-q)}}{q!} \langle \mathfrak{L}(X)\overset{n-q}{\eta}, \overset{q}{\alpha} \rangle.$$

On a l'identité

$$(19) \quad \frac{1}{q!} * \langle \mathfrak{L}(X)\overset{n-q}{\eta}, \overset{q}{\alpha} \rangle + \frac{1}{(n-q)!} \langle \mathfrak{L}(X)\overset{q}{\eta}, *\overset{q}{\alpha} \rangle = 0.$$

L'opérateur δ sur les p -formes est défini par

$$\delta\overset{p}{\alpha} = (-1)^p \overline{*}^{-1} d*\overset{p}{\alpha}.$$

En particulier, si X est un vecteur, $\delta X = -\nabla_\lambda X^\lambda$ est la 0-forme obtenue en appliquant l'opérateur δ à la 1-forme associée à X .

En utilisant les relations (16) et (17) et compte tenu de $\mathfrak{L}(X)d - d\mathfrak{L}(X) = 0$, on a

$$(20) \quad \mathfrak{L}(X)\delta\overset{p}{\alpha} - \delta\mathfrak{L}(X)\overset{p}{\alpha} = \frac{1}{p!} \delta \overline{*}^{-1} \langle \mathfrak{L}(X)\overset{n-p}{\eta}, \overset{p}{\alpha} \rangle - \frac{1}{(p-1)!} \overline{*}^{-1} \langle \mathfrak{L}(X)\overset{n-p+1}{\eta}, \delta\overset{p}{\alpha} \rangle.$$

Ce qui, d'après l'identité (19), s'écrit encore

$$\mathfrak{L}(X)\delta\overset{p}{\alpha} - \delta\mathfrak{L}(X)\overset{p}{\alpha} = -\frac{1}{(n-p)!} \delta \langle \mathfrak{L}(X)\overset{p}{\eta}, \overline{*}^{-1}\overset{p}{\alpha} \rangle + \frac{1}{(n-p-1)!} \langle \mathfrak{L}(X)\overset{p-1}{\eta}, \overline{*}^{-1}\delta\overset{p}{\alpha} \rangle.$$

Cas d'une transformation infinitésimale conforme. — Soit X une transformation infinitésimale conforme. $\tilde{g}$ désignant le $(2, 0)$ tenseur métrique, X vérifie (cf. relation (7), chap. II, 1.4)

$$(21) \quad \mathfrak{L}(X)\tilde{g} = \frac{2}{n} \delta X \tilde{g}.$$

On a alors d'après (15),

$$(22) \quad \mathfrak{L}(X) \overset{n-p}{\eta} = \frac{2p-n}{n} \delta X \overset{n-p}{\eta}.$$

En particulier, si n est pair et égal à 2ν , le (ν, ν) tenseur $\overset{\nu}{\eta}$ est invariant par toute transformation infinitésimale conforme.

Les relations (16) et (18) deviennent alors

$$(23) \quad \mathfrak{L}(X)(*\overset{p}{\alpha}) - *(\mathfrak{L}(X)\overset{p}{\alpha}) = \frac{2p-n}{n} \delta X(*\overset{p}{\alpha})$$

$$(24) \quad \mathfrak{L}(X)(\overline{*}^1\overset{q}{\alpha}) - \overline{*}^1(\mathfrak{L}(X)\overset{q}{\alpha}) = \frac{2q-n}{n} \delta X(\overline{*}^1\overset{q}{\alpha}).$$

La relation (20) compte tenu de (22) ou les relations (23) et (24) montrent que

$$\begin{aligned} (25) \quad \mathfrak{L}(X)\delta\overset{p}{\alpha} - \delta\mathfrak{L}(X)\overset{p}{\alpha} &= \frac{n-2p+2}{n} \delta X \delta\overset{p}{\alpha} + \frac{2p-n}{n} \delta(\delta X \overset{p}{\alpha}) \\ &= \frac{2}{n} \delta X \delta\overset{p}{\alpha} + \frac{n-2p}{n} (\delta X \delta\overset{p}{\alpha} - \delta(\delta X \overset{p}{\alpha})) \\ &= \frac{2}{n} \delta X \delta\overset{p}{\alpha} + (-1)^p \frac{2p-n}{n} \overline{*}^1(d\delta X \wedge *\overset{p}{\alpha}). \end{aligned}$$

En particulier, si n est pair et égal à 2ν , on a

$$(26) \quad \mathfrak{L}(X)\delta\overset{\nu}{\alpha} - \delta\mathfrak{L}(X)\overset{\nu}{\alpha} = \frac{1}{\nu} \delta X \delta\overset{\nu}{\alpha}.$$

3.2. Invariance des équations de Maxwell. — On suppose que la variété V est de dimension paire $n = 2\nu$. On désigne par j une $(\nu-1)$ -forme et par J le $(\nu-1, 0)$ tenseur associé. On considère le système de deux équations aux dérivées partielles sur les ν -formes F

$$(27) \quad dF = 0,$$

$$(28) \quad \delta F + j = 0.$$

Si $n = 4$ et si la variété V est de type hyperbolique normal, il s'agit des équations de MAXWELL de la relativité générale et J est encore appelé vecteur courant (cf. 5.2).

Ecrivons (comme pour les équations de DIRAC, 2.1) une condition nécessaire et suffisante pour que le système des équations de MAXWELL soit invariant ou fortement invariant par un champ de vecteurs X : il existe un endomorphisme K du

fibré des $(\nu-1)$ -formes et un morphisme K' du fibré des $(\nu+1)$ -formes dans le fibré des $(\nu-1)$ -formes tels que, pour toute ν -forme F ,

$$(29) \quad \mathfrak{L}(X)\delta F - \delta\mathfrak{L}(X)F + \mathfrak{L}(X)j = K(\delta F + j) + K'dF.$$

On se restreint aux transformations infinitésimales conformes et l'on utilise la relation (26), 3.1. S'il existe des endomorphismes K et K' , on a

$$K = \frac{1}{\nu} \delta X I,$$

$$K' = 0.$$

Pour que la relation (29) soit vérifiée, il faut et il suffit que

$$(30) \quad \mathfrak{L}(X)j = \frac{1}{\nu} \delta X j.$$

La condition (30), X étant conforme, est équivalente à

$$(31) \quad \mathfrak{L}(X)J = \delta X J.$$

Introduisons la $(\nu-1, 0)$ densité tensorielle de poids 1, $j = \sqrt{|g|}J$, appelée densité de courant. On a, pour tout X ,

$$\mathfrak{L}(X)j = \sqrt{|g|}(\mathfrak{L}(X)J - \delta X J).$$

La condition (30) (ou la condition (31)) est donc équivalente à

$$(32) \quad \mathfrak{L}(X)j = 0.$$

PROPOSITION 6. — Pour que les équations de MAXWELL (27) et (28) sur une variété riemannienne ou pseudo-riemannienne de dimension paire 2ν soient invariantes ou fortement invariantes par toute transformation infinitésimale conforme, il faut et il suffit que le $(\nu-1, 0)$ tenseur J (vecteur courant, si $n=4$) se transforme dans toute transformation infinitésimale conforme suivant

$$(31) \quad \mathfrak{L}(X)J = \delta X J,$$

ou, ce qui est équivalent, que la densité de courant $j = \sqrt{|g|}J$ soit invariante par toute transformation infinitésimale conforme.

En particulier, les équations de MAXWELL du vide ($J=0$) sont fortement invariantes par toute transformation infinitésimale conforme.

COROLLAIRE. — On suppose que la densité de courant est invariante par toute transformation conforme. Les équations de MAXWELL sont fortement invariantes par le plus grand groupe connexe de transformations conformes de V .

Pour l'étude des symétries, il faut utiliser d'autres méthodes.

REMARQUE. — La condition (32) est la condition de L. INFELD et A. E. SCHILD [19]. Les conditions trouvées sont aussi en accord avec J. A. SCHOUTEN et J. HAANTJES [39] et [41], et avec T. FULTON, F. ROHRlich et L. WITTEN [17] qui écrivent les équations de MAXWELL de la manière suivante

$$(27) \quad dF = 0,$$

$$(33) \quad \partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} + \mathfrak{j}^\beta = 0,$$

où $\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \sqrt{|g|} g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} F_{\lambda\mu}$ est la $(2, 0)$ densité tensorielle de poids 1 construite à partir de la 2-forme électromagnétique F .

Montrons que (28) et (33) sont équivalentes: compte tenu de $\nabla g = 0$ et de $\nabla \sqrt{|g|} = 0$, (28) s'écrit $\nabla_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} + \mathfrak{j}^\beta = 0$. De plus, $\nabla_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} = \partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta}$, car les termes supplémentaires sont nuls à cause des symétries. Cependant, il ne semble pas nécessaire de faire l'hypothèse supplémentaire que F est invariant par les transformations infinitésimales conformes, comme le supposent ces auteurs.

D'autre part, T. FULTON, F. ROHRlich et L. WITTEN [17] vérifient sur une expression explicite de la densité de courant son invariance par les transformations infinitésimales conformes.

Poids conforme et équations de Maxwell. — La condition (31) signifie que le $(\nu - 1, 0)$ tenseur J doit être de poids conforme $\nu + 1$.

Inversement, d'après (29) et (30), si J est non nul et de poids conforme $\nu + 1$, si la ν -forme F admet un poids conforme et s'il existe des transformations infinitésimales conformes non isométriques, le poids conforme de F est ν .

4. — Opérateurs différentiels sur les formes et sur les $(1, 1)$ spineurs.

On considère une variété spinorielle V . On supposera V de dimension paire $n = 2\nu$ (la plupart des calculs sont cependant valables en dimension quelconque). On utilise l'isomorphisme S (chap. I, 2.4) du module des formes sur le module des $(1, 1)$ spineurs, qui permet de retrouver certains résultats du § 2 à partir des résultats du § 3.

4.1. Opérateurs de Dirac sur les $(1, 1)$ spineurs et différentiation extérieure sur les formes. — Soit $\mathfrak{X}$ une p -forme. On sait que (A. LICHNEROWICZ [30] et [28], § 32)

$$(34) \quad \begin{cases} \mathfrak{I} S \mathfrak{X} = S(d + \delta) \mathfrak{X}, \\ \hat{\mathfrak{I}} S \mathfrak{X} = (-1)^{p+1} S(d - \delta) \mathfrak{X}. \end{cases}$$

$$(35) \quad \begin{cases} S d \mathfrak{X} = \frac{1}{2} (\mathfrak{I} + (-1)^{p+1} \hat{\mathfrak{I}}) S \mathfrak{X}, \\ S \delta \mathfrak{X} = \frac{1}{2} (\mathfrak{I} + (-1)^p \hat{\mathfrak{I}}) S \mathfrak{X}. \end{cases}$$

4.2. *Equations de Dirac sur les (1, 1)spineurs en termes tensoriels.* — Les équations de DIRAC sur les (1, 1)spineurs, $(\mathfrak{F} - m)\psi = 0$ et $(\hat{\mathfrak{F}} - m)\psi = 0$ (2.1) sont équivalentes aux équations suivantes sur les formes $\alpha = S^1\psi$

$$(36) \quad \begin{cases} d\alpha = \frac{1}{2}m \sum_{p=0}^m (1 + (-1)^{p+1}) \overset{p}{\alpha} = m \sum_{0 \leq 2q+1 \leq m} \overset{2q+1}{\alpha}, \\ \delta\alpha = \frac{1}{2}m \sum_{p=0}^m (1 + (-1)^p) \overset{p}{\alpha} = m \sum_{0 \leq 2q \leq m} \overset{2q}{\alpha}. \end{cases}$$

4.3. *Equations de Maxwell en termes spinoriels.* — Les équations de MAXWELL sur les ν -formes F , $dF = 0$ et $\delta F + j = 0$ ((27) et (28), 3.2) sont équivalentes aux équations suivantes sur les (1, 1)spineurs $\psi = SF$,

$$(37) \quad \begin{cases} \mathfrak{F}\psi + Sj = 0, \\ \hat{\mathfrak{F}}\psi + (-1)^* Sj = 0. \end{cases}$$

4.4. *Commutation de $\mathfrak{F}$ et de δ avec la dérivation de Lie.* — Soit X un champ de vecteurs sur V . On désigne ici par $\mathfrak{L}$ la dérivation de LIE $\mathfrak{L}(X)$ sur les champs de tenseurs-spineurs (en particulier sur les formes et sur les (1, 1)spineurs). Le crochet $[,]$ désigne le commutateur de deux opérateurs. Les relations (34), compte tenu de la propriété $[\mathfrak{L}, d] = 0$, permettent de montrer que

$$(38) \quad [\mathfrak{L}, \mathfrak{F}] = S[\mathfrak{L}, \delta]S^1 + [\mathfrak{L} - S\mathfrak{L}S^1, \mathfrak{F}],$$

$$(39) \quad [\mathfrak{L}, \hat{\mathfrak{F}}] = (-1)^p S[\mathfrak{L}, \delta]S^1 + [\mathfrak{L} - S\mathfrak{L}S^1, \hat{\mathfrak{F}}].$$

On en déduit

$$(40) \quad \begin{aligned} [\mathfrak{L}, \delta] &= S^1[\mathfrak{L}, \mathfrak{F}]S + [\mathfrak{L} - S^1\mathfrak{L}S, d + \delta] \\ &= (-1)^p S^1[\mathfrak{L}, \hat{\mathfrak{F}}]S - [\mathfrak{L} - S^1\mathfrak{L}S, d - \delta]. \end{aligned}$$

On suppose maintenant que X est une transformation infinitésimale conforme. On a alors (chap. III, 3.4, (24))

$$(\mathfrak{L}S - S\mathfrak{L})\overset{p}{\alpha} = \frac{p}{n} \delta X S \overset{p}{\alpha}$$

et (3.1, (25))

$$(\mathfrak{L}\delta - \delta\mathfrak{L})\overset{p}{\alpha} = \frac{2}{n} \delta X \delta \overset{p}{\alpha} + \frac{n-2p}{n} (\delta X \delta \overset{p}{\alpha} - \delta(\delta X \overset{p}{\alpha})).$$

La relation (38) s'écrit, pour X conforme,

$$(\mathfrak{L}\mathfrak{F} - \mathfrak{F}\mathfrak{L})S\overset{p}{\alpha} = \frac{2}{n} \delta X S \delta \overset{p}{\alpha} + \frac{n-2p}{n} (\delta X S \delta \overset{p}{\alpha} - S \delta (\delta X \overset{p}{\alpha})) + \\ + \frac{p+1}{n} \delta X S d \overset{p}{\alpha} + \frac{p-1}{n} \delta X S \delta \overset{p}{\alpha} - \frac{p}{n} S(d + \delta)(\delta X \overset{p}{\alpha}),$$

soit, avec $\psi = S\overset{p}{\alpha}$, compte tenu des relations (35),

$$(\mathfrak{L}\mathfrak{F} - \mathfrak{F}\mathfrak{L})\psi = \frac{1}{n} \delta X \mathfrak{F}\psi + \frac{1}{2} (\delta X \mathfrak{F}\psi - \mathfrak{F}(\delta X \psi)) + (-1)^p \frac{n-2p}{2n} (\delta X \hat{\mathfrak{F}}\psi - \hat{\mathfrak{F}}(\delta X \psi)).$$

Avec les notations déjà introduites, on a

$$\mathfrak{F}(\delta X) = \gamma^\lambda \partial_\lambda \delta X = -\hat{\mathfrak{F}}(\delta X) = S(d\delta X)$$

et

$$\mathfrak{F}(\delta X \psi) = \mathfrak{F}(\delta X)\psi + \delta X \mathfrak{F}\psi, \\ \hat{\mathfrak{F}}(\delta X \psi) = \psi \hat{\mathfrak{F}}(\delta X) + \delta X \hat{\mathfrak{F}}\psi = -\psi \mathfrak{F}(\delta X) + \delta X \hat{\mathfrak{F}}\psi.$$

On en déduit

$$(41) \quad (\mathfrak{L}\mathfrak{F} - \mathfrak{F}\mathfrak{L})\psi = \frac{1}{n} \delta X \mathfrak{F}\psi - \frac{1}{2} \mathfrak{F}(\delta X)\psi + (-1)^p \frac{n-2p}{2n} \psi \mathfrak{F}(\delta X).$$

On va comparer cette expression de $(\mathfrak{L}\mathfrak{F} - \mathfrak{F}\mathfrak{L})\psi$ à l'expression (11) obtenue en 2.3. Cette dernière s'écrit, dans le cas où X est une transformation infinitésimale conforme, grâce aux relations (11), chap. III, 2.5 et (53), chap. III, 6.6,

$$(\mathfrak{L}\mathfrak{F} - \mathfrak{F}\mathfrak{L})\psi = \frac{1}{n} \delta X \mathfrak{F}\psi - \frac{n-1}{2n} \mathfrak{F}(\delta X)\psi - \gamma^\alpha \psi (\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha.$$

On obtient l'identité, valable pour X conforme,

$$(42) \quad \gamma^\alpha \psi (\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha = \frac{1}{2n} \mathfrak{F}(\delta X)\psi + (-1)^p \frac{2p-n}{2n} \psi \mathfrak{F}(\delta X).$$

Compte tenu de l'expression de $\mathfrak{L}(X)\sigma$ pour X conforme (chap. III, 6.2, (42'))

$$(\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha = -\frac{1}{4n} (\mathfrak{F}(\delta X)\gamma_\alpha - \gamma_\alpha \mathfrak{F}(\delta X)),$$

l'identité (42) s'écrit

$$(43) \quad \gamma^\alpha \psi (\gamma_\alpha \mathfrak{F}(\delta X) - \mathfrak{F}(\delta X)\gamma_\alpha) = 2(\mathfrak{F}(\delta X)\psi + (-1)^p (2p-n) \psi \mathfrak{F}(\delta X))$$

ou encore

$$(44) \quad \partial_\beta(\delta X) \gamma^\alpha \psi (\gamma_\alpha \gamma^\beta - \gamma^\beta \gamma_\alpha) = 2 \partial_\beta(\delta X) (\gamma^\beta \psi + (-1)^p (2p - n) \psi \gamma^\beta) .$$

Par un calcul analogue à partir de (39), on a

$$(45) \quad (\mathfrak{L}\hat{\mathfrak{F}} - \hat{\mathfrak{F}}\mathfrak{L})\psi = \frac{1}{n} \delta X \hat{\mathfrak{F}}\psi - \frac{1}{2} \psi \hat{\mathfrak{F}}(\delta X) + (-1)^p \frac{n-2p}{2n} \hat{\mathfrak{F}}(\delta X)\psi ,$$

et l'on peut obtenir une expression de $(\mathfrak{L}(X)\sigma)_\alpha \psi \gamma^\alpha$ pour X conforme.

4.5. *Application à l'étude de l'invariance des équations de Dirac sur les $(1, 1)$ spineurs.* — On reprend le raisonnement de 2.3 et 2.4 compte tenu des nouvelles expressions de $(\mathfrak{L}\mathfrak{F} - \mathfrak{F}\mathfrak{L})\psi$ et $(\mathfrak{L}\hat{\mathfrak{F}} - \hat{\mathfrak{F}}\mathfrak{L})\psi$ trouvées en 4.4 (relations (41) et (45)). On trouve, comme en 2.3, $\mathfrak{K} = (1/n)\delta X I$, puis $\mathfrak{L}(X)m = (1/n)\delta X m$, et enfin les deux conditions

$$(46) \quad \forall \psi \in \underline{S(V) \otimes S^*(V)}, \quad -\frac{1}{2} \mathfrak{F}(\delta X) \psi + (-1)^p \frac{n-2p}{2n} \psi \mathfrak{F}(\delta X) = 0$$

$$(47) \quad \forall \psi \in \underline{S(V) \otimes S^*(V)}, \quad -\frac{1}{2} \psi \hat{\mathfrak{F}}(\delta X) + (-1)^p \frac{n-2p}{2n} \hat{\mathfrak{F}}(\delta X) \psi = 0 .$$

Ecrivant que l'une des deux conditions est vérifiée en particulier si ψ est l'image par S d'une ν -forme, on trouve

$$d\delta X = 0 .$$

On a retrouvé (en partie) les résultats de 2.4.

REMARQUE. — On a mis en évidence une certaine analogie entre les opérateurs de DIRAC $\mathfrak{F}$ et $\hat{\mathfrak{F}}$ sur les $(1, 1)$ spineurs et les opérateurs d et δ sur les formes. Cependant l'étude de l'invariance des équations de DIRAC sur les $(1, 1)$ spineurs et des équations de MAXWELL (au sens du chap. IV, 2.5 et 2.6, et non la $\mathcal{M}$ -invariance) a montré que: les équations de DIRAC sur les $(1, 1)$ spineurs ne sont invariantes que par les homothéties infinitésimales (avec, de plus, une hypothèse sur la loi de transformation de la masse), tandis que les équations de MAXWELL sont invariantes par toute transformation infinitésimale conforme (avec une hypothèse sur la loi de transformation de la densité de courant). Dans la démonstration de l'invariance des équations de MAXWELL, on a utilisé essentiellement le fait que F était une ν -forme, 2ν étant la dimension de la variété, et que, pour une telle ν -forme F et pour toute transformation infinitésimale conforme X , on a (relation (26), 3.1)

$$\mathfrak{L}(X) \delta F - \delta \mathfrak{L}(X) F = \frac{1}{\nu} \delta X \delta F .$$

Au contraire, les équations de DIRAC portent sur des $(1, 1)$ spineurs images par S de formes de degré quelconque; de plus, même si le $(1, 1)$ spineur ψ était l'image par S d'une ν -forme, avec $n = 2\nu$, la relation (41), 4.4, se réduirait à

$$(\mathfrak{L}(X)\mathfrak{F} - \mathfrak{F}\mathfrak{L}(X))\psi = \frac{1}{n}\delta X\mathfrak{F}\psi - \frac{1}{2}\mathfrak{F}(\delta X)\psi,$$

expression qui contient encore un terme en $d\delta X$.

De manière analogue, si l'on considère l'opérateur P (resp. $\hat{P}$) sur les $(1, 0)$ spineurs (resp. $(0, 1)$ spineurs), on a, pour toute transformation infinitésimale conforme X ,

$$\forall \psi \in \underline{S(V)}, \quad (\mathfrak{L}(X)P - P\mathfrak{L}(X))\psi = \frac{1}{n}\delta X P\psi - \frac{n-1}{2n}\mathfrak{F}(\delta X)\psi,$$

$$\forall \psi \in \underline{S^*(V)}, \quad (\mathfrak{L}(X)\hat{P} - \hat{P}\mathfrak{L}(X))\psi = \frac{1}{n}\delta X \hat{P}\psi - \frac{n-1}{2n}\psi\hat{\mathfrak{F}}(\delta X).$$

Ici encore, on trouve un terme en $d\delta X$.

5. - Vecteur courant.

5.1. Etude de $\mathfrak{L}(X)\psi$ quand ψ est un $(1, 0)$ spineur solution de l'équation de Dirac. - Soit ψ un champ de $(1, 0)$ spineurs. Ecrivons la relation (9), 2.2, en supposant que X est une transformation infinitésimale conforme et que m vérifie la condition $\mathfrak{L}(X)m = (1/n)\delta X m$. On obtient

$$\mathfrak{L}(X)(P - m)\psi = (P - m)\mathfrak{L}(X)\psi - \frac{n-1}{2n}\partial_\lambda(\delta X)\gamma^\lambda\psi + \frac{1}{n}\delta X(P - m)\psi.$$

Posons $\mathfrak{L}(X)\psi = ((n-1)/2n)\delta X\psi + \varphi_x$. On a

$$\mathfrak{L}(X)(P - m)\psi = (P - m)\varphi_x + \frac{n+1}{2n}\delta X(P - m)\psi.$$

Supposons que $(P - m)\psi = 0$. Alors

$$(48) \quad (P - m)\varphi_x = 0.$$

LEMME. - Si X est une transformation infinitésimale conforme et si ψ est un $(1, 0)$ spineur solution de l'équation de DIRAC $(P - m)\psi = 0$, alors

$$\mathfrak{L}(X)\psi = \frac{n-1}{2n}\delta X\psi + \varphi_x,$$

où φ_x est un $(1, 0)$ spineur solution de l'équation de DIRAC $(P - m)\varphi_x = 0$.

On peut poser $\varphi_x = \psi \pi_x = \pi'_x \psi$, où π_x et π'_x sont des $(1, 1)$ spineurs respectivement solution de

$$(49) \quad \gamma^\lambda \psi \nabla_\lambda \pi_x = 0$$

et de

$$(50) \quad (\mathcal{F}\pi'_x) \psi + (\gamma^\lambda \pi'_x - \pi'_x \gamma^\lambda) \nabla_\lambda \psi = 0.$$

En particulier, si l'on suppose que π_x ou π'_x est une fonction scalaire, cette fonction doit vérifier $(\partial_\lambda \pi_x) \gamma^\lambda \psi = 0$. On peut, en particulier, chercher $\mathfrak{L}(X)\psi$ de la forme $h \delta X \psi$, où h est un nombre réel; alors, $c = h - (n-1)/2n$ vérifie $c \partial_\lambda (\delta X) \gamma^\lambda \psi = 0$.

Donc si la masse m est une fonction scalaire de poids conforme 1, si le $(1, 0)$ spineur ψ est non nul et admet un poids conforme et s'il existe des transformations infinitésimales conformes non homothétiques, le poids conforme de ψ est $(n-1)/2$.

Pour la question de l'invariance conforme en relativité restreinte, voir M. FLATO, P. HILLION et J. SIMON [16].

5.2. Vecteur courant et transformations infinitésimales conformes. — Le $(1, 0)$ spineur ψ étant une solution de l'équation de DIRAC $(P - m)\psi = 0$, on considère $(\mathcal{A}\psi)\gamma\psi$ ($\mathcal{A}$ désignant l'adjonction). C'est un vecteur $((1, 0)$ tenseur), à divergence nulle, réel ou imaginaire pur, suivant les valeurs de n et k (cf. chap. I, 3.2). On pose

$$J = (\mathcal{A}\psi)\gamma\psi \quad \text{ou} \quad i(\mathcal{A}\psi)\gamma\psi$$

de manière que J soit un vecteur réel.

Soit X une transformation infinitésimale conforme. Reprenons les notations de 5.1; compte tenu de la commutation de l'adjonction avec la dérivation de LIE (chap. III, 4.2), on a

$$(51) \quad \mathfrak{L}(X)J = \delta X J + (\pi_x + \mathcal{A}\pi_x)J.$$

On déduit de cette expression de $\mathfrak{L}(X)J$ que le $(1, 1)$ spineur $f_x = \pi_x + \mathcal{A}\pi_x$ est une fonction réelle.

D'autre part, la relation (25), 3.1, montre que, pour tout $(p, 0)$ tenseur Y associé à une p -forme à divergence nulle, on a (X étant une transformation infinitésimale conforme)

$$(52) \quad \delta(\mathfrak{L}(X)Y) = \delta(\delta X Y).$$

En appliquant (52) à J et en comparant avec (51) on obtient

$$(53) \quad \delta(f_x J) = 0$$

soit

$$(54) \quad df_x \wedge (*J) = 0.$$

On suppose maintenant que V est une variété spinorielle de dimension 4. Dans le cas d'une variété hyperbolique normale, les $(1, 0)$ spineurs solutions de l'équation de DIRAC étant supposés représenter les électrons, $J = i(\mathcal{A}\psi)\gamma\psi$ est le vecteur courant créé par ces électrons (D. KASTLER [20], chap. VIII, A. LICHNEROWICZ [29], § 11). C'est le vecteur qui intervient dans les équations de MAXWELL (cf. 3.2). On peut alors comparer la loi de transformation (51) du vecteur courant J avec la loi obtenue comme condition pour que les équations de MAXWELL soient invariantes par les transformations conformes ((31), 3.2).

PROPOSITION 7. — On suppose V de dimension 4. Si l'on pose $\mathfrak{L}(X)\psi = \frac{3}{8}\delta X\psi + \psi\pi_X$, la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathfrak{L}(X)J = \delta XJ$ est que le $(1, 1)$ spineur π_X vérifie

$$(55) \quad \pi_X + \mathcal{A}\pi_X = 0.$$

COROLLAIRE. — Si $\mathfrak{L}(X)\psi = \frac{3}{8}\delta X\psi$, alors J vérifie $\mathfrak{L}(X)J = \delta XJ$. Si $\mathfrak{L}(X)\psi$ est le produit de ψ par une fonction réelle, la condition nécessaire et suffisante pour que J vérifie $\mathfrak{L}(X)J = \delta XJ$ est

$$(56) \quad \mathfrak{L}(X)\psi = \frac{3}{8}\delta X\psi.$$

Ce corollaire s'énonce encore:

Si le $(1, 0)$ spineur ψ est de poids conforme $\frac{3}{2}$, alors le vecteur courant J est de poids conforme 3. Inversement, si le vecteur courant J est de poids conforme 3 et si $\mathfrak{L}(X)\psi$ est le produit de ψ par une fonction réelle, ψ est de poids conforme $\frac{3}{2}$.

Ceci est en accord avec le résultat de J. A. SCHOUTEN et J. HAANTJES [40].

REMARQUE. — En considérant une autre dérivation $\mathcal{M}(X)$ définie par un $(1, 1)$ spineur λ_X , on obtient

$$\mathcal{M}(X)\psi = \mathfrak{L}(X)\psi + \lambda_X\psi = \frac{n-1}{2n}\delta X\psi + \psi\pi_X + \lambda_X\psi,$$

et en particulier, pour les dérivations $\mathfrak{L}_\kappa$ (chap. III, 3.1),

$$\mathfrak{L}_\kappa(X)\psi = \left(\frac{n-1}{2n} + \kappa\right)\delta X\psi + \psi\pi_X.$$

Si $n = 4$ et si $\mathfrak{L}_\kappa(X)\psi$ est le produit de ψ par une fonction réelle, la condition nécessaire et suffisante pour que J vérifie (31) est

$$(57) \quad \mathfrak{L}_\kappa(X)\psi = \left(\frac{3}{8} + \kappa\right)\delta X\psi.$$

La dérivation de LIE $\mathfrak{L}(X)$ ($\kappa = 0$) est la seule qui soit en accord avec le résultat cité.

CONCLUSION. — Dans le cas de la dimension 4, la considération du vecteur courant et de sa loi de transformation dans une transformation infinitésimale, par exemple conforme, permet de préciser la loi de transformation du $(1, 0)$ spineur ψ et inversement.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. ARTIN, *Geometric Algebra*, Interscience Publishers, New York (1957).
- [2] M. F. ATIYAH - R. BOTT - A. SHAPIRO, *Clifford Modules*, Topology, **3**, Suppl. 1 (1964), pp. 3-38.
- [3] N. BOURBAKI, *Algèbre*, chap. 9: *Formes sesquilinéaires et formes quadratiques*, Hermann, Paris (1959).
- [4] R. BRAUER - H. WEYL, *Spinors in n dimensions*, Amer. Journal of Math., **57** (1935), pp. 425-449.
- [5] E. CARTAN, *Leçons sur la théorie des spineurs*, Hermann, Paris (1938).
- [6] P. CAVAILLÈS, *Algèbre extérieure et spineurs*, Cours polycopié, Faculté des Sciences de Montpellier (1966), et Comptes rendus Acad. Sc. Paris, **258** (1964), pp. 1166-1169.
- [7] C. CHEVALLEY, *Theory of Lie Groups - I*, Princeton Univ. Press (1946).
- [8] C. CHEVALLEY, *Théorie des groupes de Lie - III*, Hermann, Paris (1955).
- [9] C. CHEVALLEY, *The Algebraic Theory of Spinors*, Columbia Univ. Press (1954).
- [10] C. CHEVALLEY, *The Construction and Study of Certain Important Algebras*, The Mathematical Society of Japan (1955).
- [11] C. CHEVALLEY, *Fundamental Concepts of Algebra*, Academic Press, New York (1956).
- [12] Y. CHOQUET-BRUHAT, *Géométrie différentielle et systèmes extérieurs*, Dunod, Paris (1968).
- [13] A. CRUMEYROLLE, *Structures spinorielles*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **11**, no. 1 (1969), pp. 19-55.
- [14] J. DIEUDONNÉ, *La géométrie des groupes classiques*, deuxième édition, Springer-Verlag, Berlin (1963).
- [15] P. A. M. DIRAC, *The Principles of Quantum Mechanics*, Clarendon Press, Oxford (1930) et quatrième édition (1958).
- [16] M. FLATO - P. HILLION - J. SIMON, *Groupe conforme, covariance des équations des champs et analyse dimensionnelle*, Comptes rendus Acad. Sc. Paris, série A, **268** (1969), pp. 1065-1068.
- [17] T. FULTON - F. ROHRlich - L. WITTEN, *Conformal Invariance in Physics*, Rev. of Modern Physics, **34**, no. 3 (1962), pp. 442-457.
- [18] A. HAEFLIGER, *Sur l'extension du groupe structural d'un espace fibré*, Comptes rendus Acad. Sc. Paris, **243** (1956), pp. 558-560.
- [19] L. INFELD - A. E. SCHILD, *A New Approach to Kinematic Cosmology* (B), Phys. Rev., **70** (1946), pp. 410-425.
- [20] D. KASTLER, *Introduction à l'électrodynamique quantique*, Dunod, Paris (1961).
- [21] S. KOBAYASHI - K. NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry*, Interscience Publishers, New York (1963).
- [22] Y. KOSMANN, *Dérivées de Lie des spineurs*, Comptes rendus Acad. Sc. Paris, série A, **262** (1966), pp. 289-292.
- [23] Y. KOSMANN, *Dérivées de Lie des spineurs. Applications*, Comptes rendus Acad. Sc. Paris, série A, **262** (1966), pp. 394-397.
- [24] Y. KOSMANN, *Propriétés des dérivations de l'algèbre des tenseurs-spineurs*, Comptes rendus Acad. Sc. Paris, série A, **264** (1967), pp. 355-358.

- [25] C. LATRÉMOLIÈRE, *Thèse*, Paris (1970).
- [26] A. LICHNEROWICZ, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Edizioni Cremonese, Roma (1955).
- [27] A. LICHNEROWICZ, *Géométrie des groupes de transformations*, Dunod, Paris (1958).
- [28] A. LICHNEROWICZ, *Champs spinoriels et propagateurs en relativité générale*, Bull. Soc. math. France, **92** (1964), pp. 11-100.
- [29] A. LICHNEROWICZ, *Champ de Dirac, champ du neutrino et transformations C , P , T sur un espace-temps courbe*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **1**, no. 3 (1964), pp. 233-290.
- [30] A. LICHNEROWICZ, *Cours du Collège de France (1963-1964)*, inédit.
- [31] A. LICHNEROWICZ, *Spineurs harmoniques*, Comptes rendus Acad. Sc. Paris, groupe I, **257** (1963), pp. 7-9.
- [32] A. LICHNEROWICZ, *Opérateurs différentiels invariants sur un espace homogène*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3ème série, **81** (1964), pp. 341-385.
- [33] J. MILNOR, *Spin Structures on Manifolds*, Enseignement mathématique (Genève), 2ème série, **9** (1963), pp. 198-203.
- [34] R. S. PALAIS, *A Definition of the Exterior Derivative in Terms of Lie Derivatives*, Proc. Amer. Math. Soc., **5** (1954), pp. 902-908.
- [35] R. S. PALAIS, *Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem*, Princeton Univ. Press (1965), chap. IV: *Differential Operators on Vector Bundles*.
- [36] P. K. RAŠEVSKIĬ, *The Theory of Spinors*, Uspehi Mat. Nauk (N. S.), **10**, no. 2 (64) (1955), pp. 3-110 (en russe) ou Amer. Math. Soc. Translations, série 2, **6** (1957), pp. 1-110 (en anglais).
- [37] M. RIESZ, *L'équation de Dirac en relativité générale*, Douzième Congrès des Mathématiciens Scandinaves, Lund (1953), pp. 241-259, et *Clifford Numbers and Spinors*, Lecture Notes, Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, University of Maryland (1957-1958).
- [38] J. A. SCHOUTEN, *On the Geometry of Spin Spaces*, Kon. Ned. Akad. Wet. Proc., **52** (1949), no. 6, pp. 597-609; no. 7, pp. 687-695; no. 9, pp. 938-948 et **53** (1950), no. 3, pp. 261-272.
- [39] J. A. SCHOUTEN - J. HAANTJES, *Über die konforminvariante Gestalt der Maxwellschen Gleichungen und der elektromagnetischen Impulsenergiegleichungen*, Physica, **1** (1934), pp. 869-872.
- [40] J. A. SCHOUTEN - J. HAANTJES, *Über die konforminvariante Gestalt der relativistischen Bewegungsgleichungen*, Kon. Ned. Akad. Wet. Proc., **39** (1936), pp. 1059-1065.
- [41] J. A. SCHOUTEN - J. HAANTJES, *Die Gleichberechtigung gleichförmig beschleunigter Beobachter für die elektromagnetischen Erscheinungen*, Kon. Ned. Akad. Wet. Proc., **43** (1940), pp. 1288-1299.
- [42] J.-M. SOURIAU, *Géométrie et relativité*, Hermann, Paris (1964).
- [43] K. YANO, *The Theory of Lie Derivatives*, North Holland Publ. Co., Amsterdam (1957).
- [44] J. D. ZUND, *Some Theorems on Spinor-Tensors*, Annali di Matematica pura ed appl., série 4, **76** (1967), pp. 1-9.

INDICE DEL TOMO XCI DELLA SERIE 4^a

G. ARNESE: Su alcune proprietà dell'integrale di Poisson relativo ad una equazione parabolica di ordine $2m$ a coefficienti non costanti	pag. 1
G. ARNESE: Sulla regolarizzazione delle soluzioni del problema di Cauchy-Dirichlet per un'equazione parabolica di ordine superiore	» 17
CHUNG-CHUN YANG: On meromorphic solutions of generalized algebraic differential equations	» 41
G. B. GREEN - A. M. KRALL: Linear differential systems with infinitely many boundary points	» 53
A. M. KRALL: Self-adjoint boundary value problems with infinitely many boundary points	» 69
J. PERSSON: On the supports of solutions of linear partial differential equations with analytic coefficients.	» 79
T. ZOLEZZI: Esistenza e condizioni necessarie per controlli ottimi di sistemi definiti da equazioni integrali	» 97
K. B. LAL - S. S. SINGH: Commutation formulae in conformal Finsler space - I	» 119
N. BERRUTI ONESTI: Sopra una classe di problemi variazionali di ordine n	» 129
F. J. BUREAU: Équations différentielles du second ordre en Y et du second degré en $\bar{Y}$ dont l'intégrale est à points critiques fixes.	» 163
P. VALABREGA: Anelli Henseliani topologici - I	» 283
P. VALABREGA: Anelli Henseliani topologici - II	» 305
Y. KOSMANN: Dérivées de Lie des spineurs.	» 317

